



6. Prüfungskomplex - Mathematik Schuljahr 2024/25

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Abgabe:
25.11.2024

1.

Zur Beschreibung von Straßenverläufen werden Funktionsgraphen genutzt. In einer Planung beschreibt für jeden Wert von k ($k \in \mathbb{R}; k > 0$) der Graph der Funktion f_k mit $f_k(x) = k \cdot e - k \cdot e^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$) den Verlauf der Mittellinie einer möglichen Schnellstraße.

- 1.1. Weisen Sie nach, dass der Schnittpunkt der Graphen der Funktion f_k mit der Abszissenachse die Koordinaten $(-1|0)$ hat.

Zeigen Sie, dass die Funktion f_k für jeden Wert von k ($k \in \mathbb{R}; k > 0$) streng monoton steigend ist.

Ermitteln Sie den Wert von k so, dass der Graph von f_k durch den Punkt mit den den Koordinaten $(0|e-1)$ verläuft.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Der Verlauf der Mittellinie der ausgewählten Schnellstraße kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Kilometer) im Intervall $0 \leq x \leq 4$ durch den Graphen der Funktion f_k mit $k=1$ beschrieben werden. Der Verlauf der Mittellinie einer Landstraße kann im gegebenen Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x$ ($x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 4$) beschrieben werden (siehe Abbildung).

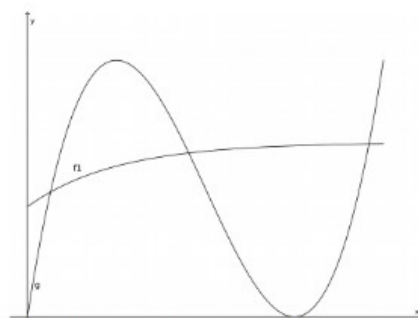


Abbildung (nicht maßstäblich)

Die Ordinatenachse verläuft in Süd-Nord-Richtung und die Abszissenachse in West-Ost-Richtung. Die Mittellinien der beiden Straßen schneiden sich von West nach Ost in den Punkten $A(0,259|y_A)$, $B(x_B|2,555)$ und $C(3,838|2,697)$.

- 1.2. Geben Sie die Koordinaten y_A und x_B an.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

- 1.3. Ermitteln Sie den Längenunterschied der Mittellinien der beiden Straßen zwischen den Punkten A und C.

Erreichbare BE-Anzahl: 06

- 1.4. Der Punkt E ist der südlichste Punkt der Mittellinie der Landstraße zwischen B und C. Auf der Mittellinie der Landstraße zwischen den Punkten B und E existiert genau ein Punkt F, der vom Punkt C den geringsten Abstand besitzt.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes F.

Geben Sie diesen geringsten Abstand an.

Erreichbare BE-Anzahl: 09

- 1.5 Das Gelände zwischen der Landstraße und der Schnellstraße im Bereich zwischen den Punkten A und C soll mit Laubbäumen neu aufgeforstet werden. Ermitteln Sie die Anzahl der Bäume, wenn pro Hektar 100 Bäume angepflanzt werden sollen.

Erreichbare BE-Anzahl: 04



2. Gegeben sind die Funktionen $y = f_a(x) = a^2 x - \ln(x)$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0, x \in \mathbb{R}, x > 0$)

- a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graphen alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen.
- b) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion gibt, die genau eine Nullstelle besitzt. Ermitteln Sie diese Nullstelle.
- c) Für jedes a existiert eine Tangente t_a an den Graph der Funktion f_a , die durch den Koordinatenursprung verläuft. Der Koordinatenursprung, der Berührungspunkt $B_a(x_{Ba} | f(x_{Ba}))$ dieser Tangente mit dem Graphen der Funktion f_a und der Punkt $P_a(x_{Ba} | 0)$ bestimmen ein Dreieck. Ermitteln Sie den Wert a , für den das zugehörige Dreieck den Flächeninhalt 5 besitzt.

3.

Gegeben sind Funktionen f_k und g_k durch die Gleichungen
 $y = f_k(x) = x^2 \cdot e^{1-kx}$ und $y = g_k(x) = x \cdot e^{1-kx}$ ($k \in \mathbb{R}, k > 0; x \in \mathbb{R}$).

- a) Geben Sie für die Funktionen f_k die Nullstellen an.
Weisen Sie nach, dass für die 2. Ableitung der Funktionen f_k gilt:
 $f_k''(x) = e^{1-kx} \cdot (k^2 x^2 - 4kx + 2)$ ($k \in \mathbb{R}, k > 0; x \in \mathbb{R}$).
Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktionen f_k und untersuchen Sie die Art der Extrema.
Zeigen Sie, dass eine Funktion existiert, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_k liegen.
Erreichbare BE-Anzahl: 12
- b) Für jedes k besitzt der Graph der Funktion f_k genau zwei Wendepunkte.
Berechnen Sie die Wendestellen.
Erreichbare BE-Anzahl: 2
- c) Für jedes k haben die Graphen der Funktionen f_k und g_k genau zwei gemeinsame Punkte.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Geben Sie den Wert k an, für den sich die zugehörigen Graphen im Punkt $Q(1;1)$ schneiden.
Erreichbare BE-Anzahl: 4
- d) Für jedes k existiert die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle $x = 1$.
Ermitteln Sie den Wert k , für den der Anstiegswinkel dieser Tangente 45° beträgt und geben Sie für diesen Fall eine Gleichung dieser Tangenten an.
Erreichbare BE-Anzahl: 5
- e) Für jedes u ($u \in \mathbb{R}; u > 0$) sind der Koordinatenursprung und der Punkt $R_u(u; f_1(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R_u so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird.
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.
Erreichbare BE-Anzahl: 5