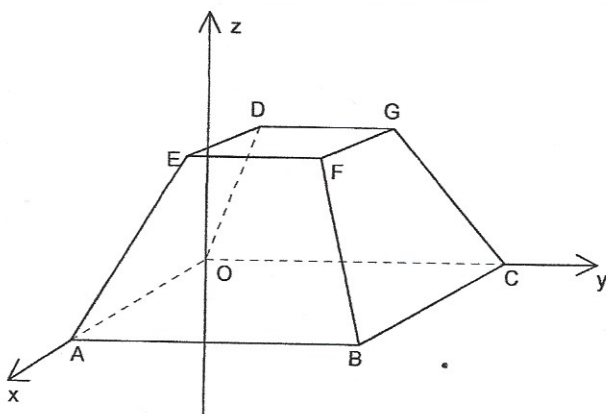


Lösungen - Übungen Analytische Geometrie der Geraden

1

1. geg.: Gerader Pyramidenstumpf ges.: Nachweis für 5
beste Methode



Lös.: Methode 1:

- 4 Geradengleichungen aufstellen: $g(AE); g(BF); g(CG); g(OD)$
- jeweils 2 Gleichsetzen, Schnittpunkt berechnen

Methode 2:

- 2 Geradengleichungen aufstellen: $g(AE); g(BF)$
- Schnittpunkt bestimmen
- Geradengleichung $g(CG); g(OD)$ aufstellen
- mit Schnittpunkt Punktprobe bei $g(CG)$ und $g(OD)$ durchführen

Methode 3:

- 2 Geradengleichungen aufstellen: $g(AE); g(BF)$
- Gleichsetzungsverfahren anwenden und Parameter bestimmen
- aufgrund der Symmetrie sind alle Parameter gleich
- Parameter in die anderen beiden Geradengleichungen $g(CG)$ und $g(OD)$ einsetzen
- Schnittpunkt nachweisen

Nachweis: Wir benötigen alle 4 Geradengleichungen

$$g(AE): \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \\ 12 \end{pmatrix} ; \quad g(BF): \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -4,5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$g(CG): \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 12 \end{pmatrix} ; \quad g(OD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Methode 1: Lagrange-Methode $g(AE); g(BF)$

- 1) lineare Abhängigkeit auf Grund der Aufgabe nicht ex.
- 2) Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 8 - 3t & = 8 - 3s \\ \text{II} & 4,5t & = 12 - 4,5s \\ \text{III} & 12t & = 12s \end{array} \rightarrow \textcircled{X} \quad \wedge \quad s = t$$

$$\begin{array}{lcl} \textcircled{X} & 4,5t & = 12 - 4,5t \\ & 9t & = 12 \\ & t & = \frac{4}{3} \end{array} \quad \wedge \quad s = \frac{4}{3}$$

Probe mit I:

$$8 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 8 - 3 \cdot \frac{4}{3}$$

$$4 = 4 \quad \text{wahr}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{S(4 | 6 | 16)}}$$

Lageuntersuchung $g(CG); g(OD)$

- 1) lin. Abhängigkeit nicht ex.
- 2) Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 3r & = 3u \\ \text{II} & 12 - 4,5r & = 4,5u \\ \text{III} & 12r & = 12u \end{array} \rightarrow \textcircled{X} \quad \wedge \quad r = u$$

$$\begin{array}{lcl} \textcircled{X} & 12 - 4,5r & = 4,5r \\ & 12 & = 9r \\ & r & = \frac{4}{3} \end{array} \quad \wedge \quad u = \frac{4}{3}$$

Probe mit I:

$$3 \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3}$$

$$4 = 4 \quad \text{wahr}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{S(4 | 6 | 16)}}$$

Übereinstimmung beider Schnittpunkte

$\rightarrow$ alle Geraden schneiden sich im selben Punkt.

Metode 2: Lageuntersuchung $g(AE); g(B, F)$

- 1) lin. Abhängigkeit der Richtungsvektoren ex. nicht
- 2) Gleichsetzungsverfahren

→ Methode 1 ... Schnittpunkt $S(4|6|16)$

Punktproben: mit $g(CG)$ und $g(OD)$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 4 = 3r \\ 6 = 12 - 4,5r \\ 16 = 12r \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} r = \frac{4}{3} \\ r = \frac{4}{3} \\ r = \frac{4}{3} \end{array} \rightarrow \text{wahr}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 4 = 3u \\ 6 = 4,5u \\ 16 = 12u \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u = \frac{4}{3} \\ u = \frac{4}{3} \\ u = \frac{4}{3} \end{array} \rightarrow \text{wahr}$$

→ Alle Geraden schneiden sich im selben Punkt.

Metode 3: Lageuntersuchung $g(AE); g(BF)$

- 1) lin. Abhängigkeit ex. nicht
- 2) Gleichsetzungsverfahren

→ Methode 1 ... Parameter $t = s = \frac{4}{3}$ und $S(4|6|16)$

Parameter in die beiden anderen Geraden einsetzen

$$g(CG): \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow S(4|6|12)$$

$$g(OD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow S(4|6|12)$$

→ Alle Geraden schneiden sich im selben Punkt.

Fazit: Keine der drei Methoden bietet besondere Rechen Vorteile.

Metode 2 und 3 benötigen nur einmal den Lösungsweg des LGS.

2. geg.: $P_1(24/5/7)$; $P_2(21/3/6,5)$ Flugbahn g
 $P_0(8/-1/1)$; $\vec{a} = (2/-1/2)$ Flugbahn h

ges.: Lagebeziehung g-h, eventuell Schnittpunkt = Gefahr!

lös.: Geradengleichungen aufstellen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung untersuchen:

$$1) \vec{a} = r \vec{b} \leadsto \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \leadsto r \text{ ex. nicht} \leadsto g \times h \text{ od. } g \parallel h$$

2) Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & 24 - 3t & = 8 + 2u \\ \text{II} & 5 - 2t & = -1 - u \\ \text{III} & 7 - 0,5t & = 1 + 2u \end{array} \quad \leadsto u = 2t - 6 \quad \textcircled{*}$$

$$\begin{array}{lcl} \textcircled{*} & 24 - 3t & = 8 + 2(2t - 6) \\ & 24 - 3t & = -4 + 4t \\ & -7t & = -28 \\ & \underline{t = 4} & \quad \leadsto \underline{u = 2} \end{array}$$

$$\text{Probe mit III: } 7 - 0,5 \cdot 4 = 1 + 2 \cdot 2 \quad \underline{5 = 5} \quad \text{wahr} \quad \underline{g \times h}$$

$\leadsto$ Schnittpunkt bei $S(12/-3/5)$ Kollisionsgefahr

3. geg.: $A(100/100/150)$; $\vec{a} = (4/1,5/2) \rightarrow \text{Straße } g(AB)$
 $D(380/205/310)$; $\vec{b} = (0/0/1) \rightarrow \text{Schacht } g(DB)$
 $1 = 1m!$ $\hookrightarrow \text{senkrecht} \hat{=} z\text{-Achsenrichtung}$

a) ges.: B und $|\vec{BD}|$

lös.: Geradengleichungen aufstellen:

$$g(AB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad g(DB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 380 \\ 205 \\ 310 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung untersuchen:

$$1) \vec{a} = r \vec{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow r \text{ ex. nicht} \rightarrow g(AB) \times g(DB)$$

Gleichungsverfahren:

oder in Widerspruch

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 100 + 4t = 380 \\ \text{II} \quad 100 + 1,5t = 205 \\ \text{III} \quad 150 + 2t = 310 + s \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}} \right\} \underline{\text{CP:}} \quad t = 70; s = -20$$

$$\text{Probe mit I: } 100 + 4 \cdot 70 = 380$$

$$\underline{380 = 380}$$

Wahr $\rightarrow g(AB) \times g(DB)$

Schnittpunkt B ermitteln:

$$s = -20 \text{ in } g(DB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 380 \\ 205 \\ 310 \end{pmatrix} + (-20) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 205 \\ 290 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow B(380/205/290)$$

$$\hookrightarrow |\vec{BD}| = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2}$$

$$= \sqrt{(380 - 380)^2 + (205 - 205)^2 + (310 - 290)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 0 + 20^2} = \underline{\underline{20m}}$$

! oder einfacher: Da D über B liegt, entspricht die Länge $\vec{BD}$ genau der Differenz beider z -Koordinaten:

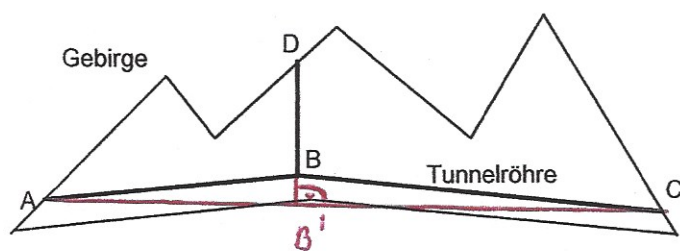
$$\underline{310 - 290 = 20m}$$

zu 3. b) geg.: $|\vec{BC}| = 425 \text{ m}$; A und C gleich hoch wie NW ⑥

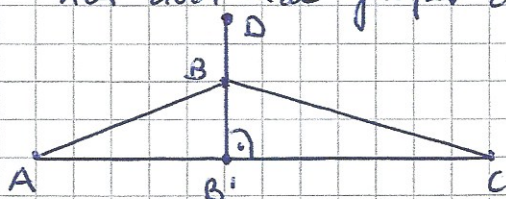
$$A(100 | 100 | 150)$$

$$C(x_c | y_c | 150)$$

$$\text{ges.: } x_c, y_c$$



Lös.: $BB'C$ ist ein rechtwinkliges Δ mit $\square$ bei B'
hier noch mal größer dargestellt:



Da A, B, C, D komplanar sind, muss auch B' in der selben (senkrechten) Ebene ABCD liegen.

Da B' genau unter B liegt, hat B' die Koordinaten:

$$B'(380 | 205 | 150)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 von B Höhe von A und C

Um die Koordinaten eines Punktes C zu finden, können wir wieder (wie schon früher mal gelernt) seinen Ortsvektor $\vec{OC}$ verwenden und eine Vektorgleichung aufschreiben: $\vec{OC} = \vec{OB'} + \vec{B'C}$

NR: $\vec{B'C}$ müssen wir ersetzen, da C nicht bekannt ist.

Da $B'C$ die gleiche Richtung wie AB' hat, nehmen wir den Einheitsvektor $\frac{1}{|\vec{AB'}|} \cdot \vec{AB'}$

mit der Länge 1 und multiplizieren ihn mit

der Länge $|\vec{B'C}|$. Die Länge $|\vec{B'C}|$ erhalten

wir über den Pythagoras: $|\vec{B'C}|^2 = |\vec{BC}|^2 - |\vec{BB'}|^2$

Dabei betragen die Längen $|\overrightarrow{BC}| = 425 \text{ m}$

und $|\overrightarrow{BB'}| = 140 \text{ m}$ (Differenz der z-Koordinaten von A und B)

$$z_B - z_A = 290 - 150 = 140 \text{ m}$$

$$\wedge |\overrightarrow{B'C}| = \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{BB'}|^2}$$

$$|\overrightarrow{B'C}| = \sqrt{425^2 - 140^2} = \underline{\underline{401,3 \text{ m}}}$$

$$\wedge \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'C}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} + 401,3 \cdot \frac{\overrightarrow{AB'}}{|\overrightarrow{AB'}|}$$

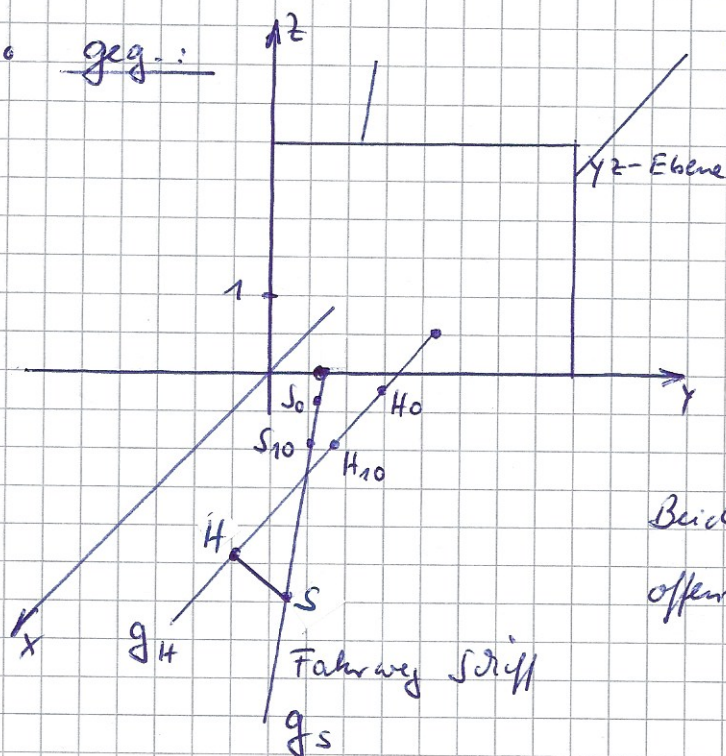
$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 380 \\ 205 \\ 150 \end{pmatrix} + 401,3 \cdot \frac{1}{\sqrt{(380-100)^2 + (205-100)^2 + 0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 380 \\ 205 \\ 150 \end{pmatrix} + 401,3 \cdot \frac{1}{299,04} \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 380 \\ 205 \\ 150 \end{pmatrix} + 1,342 \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 755,8 \\ 345,9 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$\wedge \underline{\underline{C(755,8 | 345,9 | 150)}}$$

4. geg.:



Flugbahn Hubschrauber

yz-Ebene

Skizze nicht
maßstäblich!

Beide Geraden verlaufen
offensichtlich windschief.

1 = 1 km!

Schiffdaten: $S_0(1|1|0)$; $S_{10}(3|2|0) \rightarrow g_S$

Hubschrauber: $H_0(19|5|0,5)$; $H_{10}(14|5|0,5) \rightarrow g_H$

ges.: Zeitpunkt des geringsten Abstandes

→ Extremwertaufgabe!

Lös.: Von S_0 bis S_{10} bzw. H_0 bis H_{10} vergehen 10 Minuten.

→ Geradengleichungen aufstellen:

$$g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Die Länge des Richtungsvektors
entspricht dabei der Zeitspanne
von 10 Minuten

→ für $t=1$ gilt die Zeit 10 Min

$$g_H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Da die gleiche Zeit 10 Min
vergangen ist, setzt ich hier
denselben Parameter t ein

→ ges. in die Zeit t , bei der $|\vec{SH}|$ am kleinsten ist

Abstandsfunktion: (mittels Betrag des Vektors $\vec{SH}$)

$$|\vec{SH}| = \sqrt{(x_H - x_S)^2 + (y_H - y_S)^2 + (z_H - z_S)^2} = f(x_H, x_S, y_H, \dots)$$

NB:

$$\begin{aligned} x_S &= 1 + 2t \\ y_S &= 1 + t \\ z_S &= 0 \end{aligned} \quad \text{entnommen aus } g_S$$

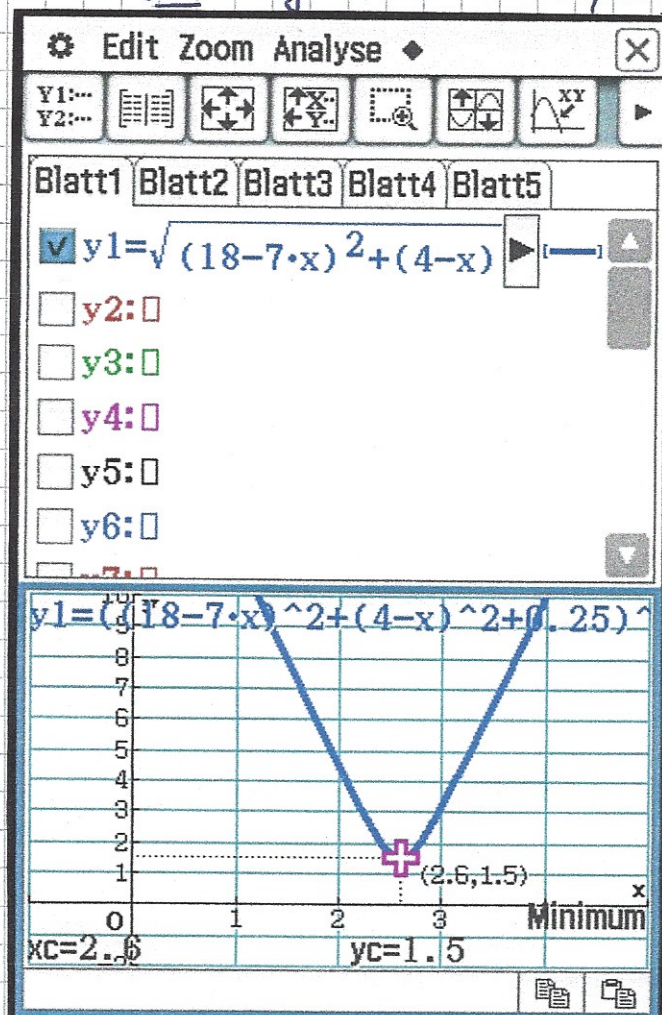
$$\begin{aligned} x_H &= 19 - 5t \\ y_H &= 5 \\ z_H &= 0,5 \end{aligned} \quad \text{entnommen aus } g_H$$

Zielfunktion:

$$|\vec{SH}| = f(t) = \sqrt{(19 - 5t - 1 - 2t)^2 + (5 - 1 - t)^2 + (0,5 - 0)^2}$$

$$f(t) = \sqrt{(18 - 7t)^2 + (4 - t)^2 + 0,25}$$

CP: $f(t)$ zeichnen, Minimum suchen



$$\rightarrow t_{\min} = 2,6 \hat{=} \underline{\underline{26 \text{ Min}}}$$

und

$$|\vec{SH}|_{\min} = \underline{\underline{1,5 \text{ km}}}$$