

Lösungen zum Punkt 3.) - lineare lineare Anwendungen

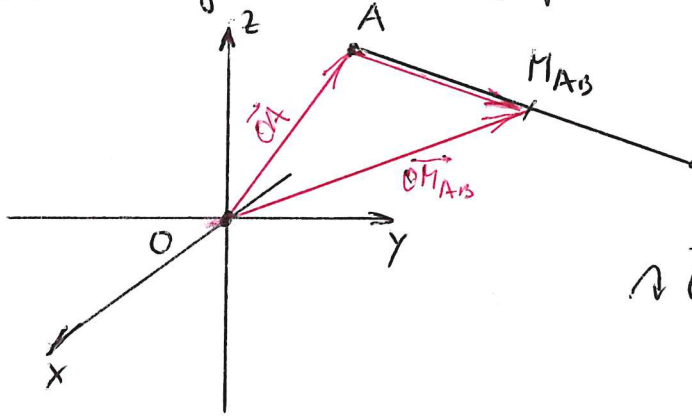
1

Übung 1)

geg.: Punkte in $\mathbb{R}_3$: $A(x_A | y_A | z_A)$; $B(x_B | y_B | z_B)$

ges.: Mittelpunkt M_{AB}

lös.: allgemeine Lösungsformel



$$\vec{OM}_{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB}$$

wie in $\mathbb{R}_2$ auch!

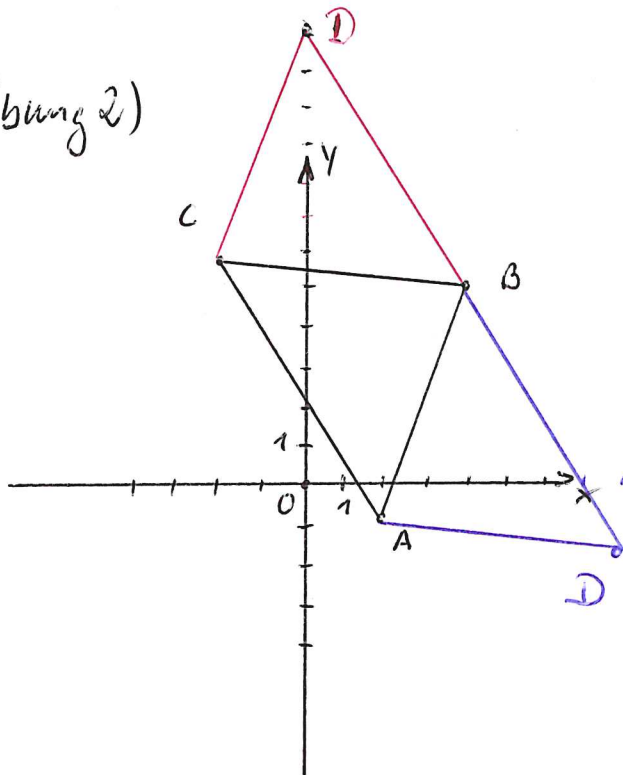
$$\vec{OM}_{AB} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM}_{AB} = \begin{pmatrix} x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \\ z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A) \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM}_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \\ \frac{1}{2}(z_A + z_B) \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM}_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \mid \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Übung 2)



geg.: $A(2|-1); B(4|5); C(-2|6)$

ges.: D für Parallelogramm ABDC

lös.: $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}$

$$\text{Nr: } \vec{BD} = \vec{AC}$$

$$\wedge \vec{OD} = \vec{OB} + \vec{AC}$$

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-2 \\ 6-(-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \wedge \underline{\underline{D(0|12)}}$$

geg.: A, B, C

ges.: D für Parallelogramm ADBC

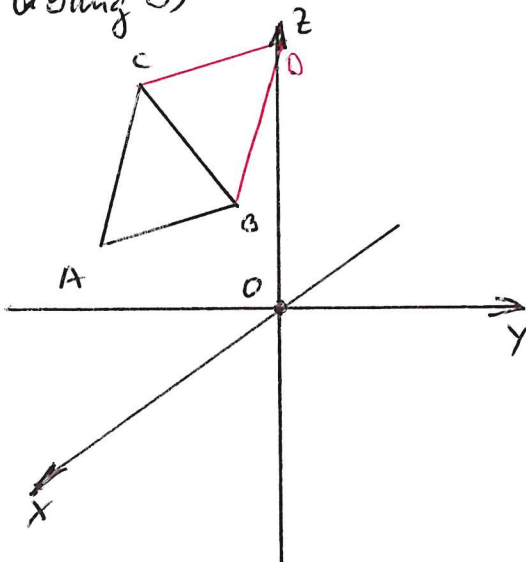
lös.: Mal eine andere Lös.-variante:

$$\vec{AD} = \vec{CB}$$

$$\wedge \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 5 - 6 \end{pmatrix}$$

$$\wedge \begin{matrix} x_D - 2 = 6 & \wedge & x_D = 8 \\ y_D + 1 = -1 & \wedge & y_D = -2 \end{matrix} \wedge \underline{\underline{D(8|-2)}}$$

Übung 3)



geg.: $A(8|4|2); B(6|10|0); C(6|8|8)$

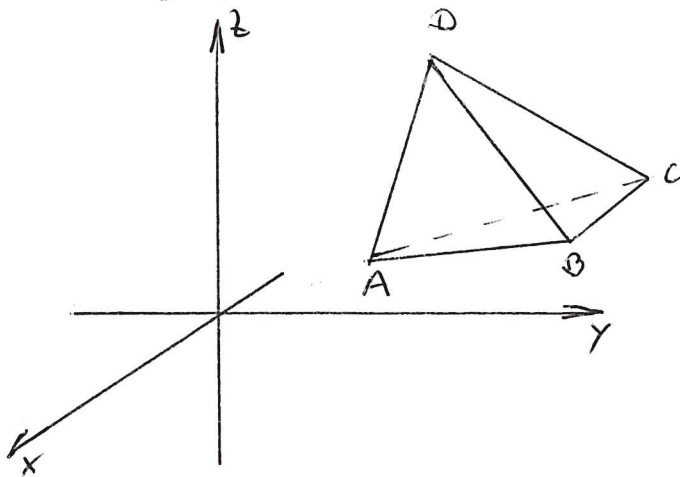
ges.: D für Parallelogramm ABDC

lös.: Skizze völlig frei (ohne Koordinaten beachten)

$$\vec{AB} = \vec{CD} \quad (\text{eine Möglichkeit von vielen})$$

$$\begin{pmatrix} 6-8 \\ 10-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D-6 \\ y_D-8 \\ z_D-8 \end{pmatrix}$$

$$\wedge \begin{matrix} -2 = x_D - 6 & \wedge & x_D = 4 \\ 6 = y_D - 8 & \wedge & y_D = 14 \\ -2 = z_D - 8 & \wedge & z_D = 6 \end{matrix} \wedge \underline{\underline{D(4|14|6)}}$$



geg.: Tetraeder mit

$A(8|4|2); B(6|10|0); C(-2|10|0)$

$D(6|8|8)$

Skizze nicht maßstäblich, nicht auf exakte Lage geachtet

ges.: Mittelpunkt,
Schwerpunkt Δ
Schwerpunkt Tetraeder

Lös.: Mittelpunkt $M_{AD} \left(\frac{x_A + x_D}{2} \mid \frac{y_A + y_D}{2} \mid \frac{z_A + z_D}{2} \right)$

$$M_{AD} \left(\frac{8+6}{2} \mid \frac{4+8}{2} \mid \frac{2+8}{2} \right)$$

$$\underline{\underline{M_{AD} (7 \mid 6 \mid 5)}}$$

analog: $M_{BD} (6 \mid 9 \mid 4); M_{CD} (2 \mid 9 \mid 4)$

Schwerpunkt $S_{ABC} \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} \mid \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \mid \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$

$$S_{ABC} \left(\frac{8+6+(-2)}{3} \mid \frac{4+10+10}{3} \mid \frac{2+0+0}{3} \right)$$

$$\underline{\underline{S_{ABC} (4 \mid 8 \mid \frac{2}{3})}}$$

analog: $S_{ABD} (\frac{20}{3} \mid \frac{22}{3} \mid \frac{10}{3}); S_{BCD} (\frac{10}{3} \mid \frac{28}{3} \mid \frac{8}{3});$

$$S_{ACD} (4 \mid \frac{22}{3} \mid \frac{10}{3})$$

Raumschwerpunkt: z.B. gefunden auf:

learnattack.de/schuelerlexikon/mathematik/schwerpunkt

$$\rightarrow \underline{\underline{\vec{S}_{Tetra} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})}}$$

Achtung! unordentliche Schreibweise!

↗ Interpolation notwendig!

$$\rightarrow \vec{OS} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) \Rightarrow \text{alle Vektoren sind hier abzulesen!}$$

Rechnet man das in die Koordinatenschreibweise um,

$$\text{erhält man für } T \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \mid \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \mid \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right) \rightarrow \underline{\underline{T (\frac{9}{2} \mid 8 \mid \frac{5}{2})}}$$

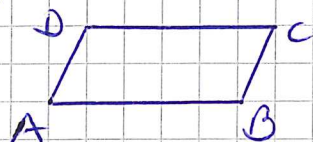
HA

S. M8/6a)

4

geg.: $A(2|0|3)$; $B(4|4|4)$; $C(11|7|9)$; $D(9|3|8)$

ges.: ABCD ist ein Parallelogramm

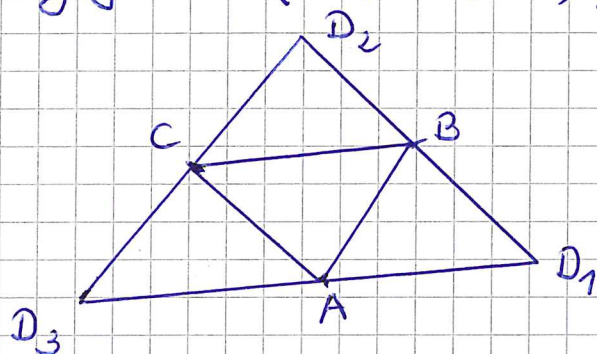


$$\wedge \vec{AB} = \vec{DC} \text{ bzw. } \vec{AD} = \vec{BC}$$

Lös.: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \underline{\underline{\vec{AB} = \vec{DC}}}$ w.z.w.

S. M8/7a)

geg.: $A(2|-11|43)$; $B(3|7|-8)$; $C(0|4|5)$



I) $\vec{AC} = \vec{D_1B}$

II) $\vec{AB} = \vec{CD_2}$

III) $\vec{AB} = \vec{D_3C}$

I)

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 15 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_{D_1} \\ 7 - y_{D_1} \\ -8 - z_{D_1} \end{pmatrix}$$

II)

$$\begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{D_2} - 0 \\ y_{D_2} - 4 \\ z_{D_2} - 5 \end{pmatrix}$$

III)

$$\begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x_{D_3} \\ 4 - y_{D_3} \\ 5 - z_{D_3} \end{pmatrix}$$

$$\wedge D_1(24|-8|30) \wedge D_2(-18|22|-46) \wedge D_3(18|-14|56)$$

S. M8/7b)

$t \neq 0$; $t \in \mathbb{R}$

geg.: $A(3t|-9t|t)$; $B(5t|0|-8t)$; $C(t|2t|3t)$

I) $\vec{AC} = \vec{D_1B}$

II) $\vec{AB} = \vec{CD_2}$

III) $\vec{AB} = \vec{D_3C}$

$$\begin{pmatrix} -2t \\ 11t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t - x_{D_1} \\ 0 - y_{D_1} \\ -8t - z_{D_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 9t \\ -9t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{D_2} - t \\ y_{D_2} - 2t \\ z_{D_2} - 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 9t \\ -9t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - x_{D_3} \\ 2t - y_{D_3} \\ 3t - z_{D_3} \end{pmatrix}$$

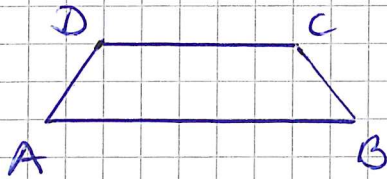
$$\wedge D_1(7t|-11t|-10t) \wedge D_2(3t|11t|-6t) \wedge D_3(-t|-7t|12t)$$

S. 118/110)

geg.: Viereck ABCD mit

$$A(3|0|-1); B(4|-1|-2); C(-1|3|1); D(-4|6|4)$$

ges.: ABCD ist ein Trapez



Lös.: Zeigen: 2 Vektoren sind parallel

$$\underline{\text{z.B.:}} \quad \vec{AB} \parallel \vec{DC}$$

Die beiden anderen sind nicht parallel

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{da } \vec{AB} = \frac{1}{3} \cdot \vec{DC} \quad \text{folgt } \vec{AB} \parallel \vec{DC}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{da } \vec{AD} \neq r \cdot \vec{BC} \quad \text{folgt } \vec{AD} \nparallel \vec{BC}$$

 $\wedge$ ABCD ist ein Trapez

S. 118/120)

$$\underline{\underline{\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}}$$