Lösung

1)

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 6 & \downarrow \cdot 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 & \downarrow - \\ -1 & 1 & -1 & -2 & \downarrow + \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 & \\ 0 & 3 & -1 & 3 & \downarrow \cdot 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & \downarrow \cdot (-3) \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 & \\ 0 & 3 & -1 & 3 & \\ 0 & 0 & -2 & -6 & :(-2) \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 & \uparrow - \\ 0 & 3 & -1 & 3 & \uparrow + \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \text{A2} \\ \hline -1 & -1 & 0 & -3 & \\ 0 & 3 & 0 & 6 & :3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline -1 & -1 & 0 & -3 & \uparrow + \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & :(-1) \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \\ \hline x & & & = 1 & \\ & y & & = 2 & \\ & & z & = 3 & \\ \hline \end{array}$$

$L = \{(x,y,z); (1\,|\,2\,|\,3)\}$

2) a) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $2A - B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 \\ -12 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

e) $10A + 20B = \begin{pmatrix} -20 & 30 & 110 \\ 40 & -50 & 40 \end{pmatrix}$

CP-Eingabe der Matrix A mit $\Sigma(A) = (2,3)$:

$[a_{11}\ a_{12}] \nearrow [a_{11}\ a_{12}\ a_{13}] \nearrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

3)

a) $A = 22 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 11 \end{pmatrix}$

b) $B = b \cdot \begin{pmatrix} b & a & 1 \\ a^2 & ab & b^2 \\ 1 & b^3 & a^4 \end{pmatrix}$

CP-Matrix-Def.: $(..) \Rightarrow mat1$

4) a) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = M - 3N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -6 \\ -1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

c) $X = \frac{1}{M} \cdot N = M^{-1} \cdot N$, M^{-1} ist die inverse Matrix zu M

zu 4) Bildung von M^{-1}: (Gauß-Jordan-Algorithmus) ②

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Blockmatrix (A | E) mit E als Einheitsmatrix

$\cdot(-2)$ / $+$ ↓

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\cdot 4$ / $+$ ↓

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$:(-6)$ /

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

-4 / $\cdot 4$ /

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$+$ ↑ / $\cdot(-2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$:(-1)$ /

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

↑ $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

↑ $X = M^{-1} \cdot N$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Multiplikation verketteter Matrizen heißt CP: ( ) × ( )

zu 4 c) Variante 2:

M. X	a d g b e h c f i
1 2 4 0 1 0 2 0 2	$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&2&3\end{pmatrix}=N$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&1&3\\1&0&2\\-\frac{5}{6}&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

LGS 1; 2; 3:

$$\left.\begin{array}{l}1a+2b+4c=0\\0a+1b+0c=1\\2a+0b+2c=1\end{array}\right\}\ L=\left\{\left(\frac{4}{3}\,\middle|\,1\,\middle|\,-\frac{5}{6}\right)\right\}\quad (a\ b\ c)$$

$$\left.\begin{array}{l}1d+2e+4f=1\\0d+1e+0f=0\\2d+0e+2f=2\end{array}\right\}\ L=\left\{(1\,|\,0\,|\,0)\right\}\quad (d\ e\ f)$$

$$\left.\begin{array}{l}1g+2h+4i=1\\0g+1h+0i=2\\2g+0h+2i=3\end{array}\right\}\ L=\left\{\left(3\,|\,2\,|\,-\frac{3}{2}\right)\right\}\quad (g\ h\ i)$$

5.

a) $A_{RE}=\begin{pmatrix}200&150&100\\8&6&10\end{pmatrix}$ ← Rohre, ← Kopp l.

gesucht: Bedarf an Rohren und Kopplung nach Auftrag lt. Tab. 1

Lös.: P - Produktionsmengen - Matrix

$$P=\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix};\quad R\text{ - Rohstoffmengen - Matrix}$$

$$R=A_{RE}\cdot P=\begin{pmatrix}200&150&100\\8&6&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1550\\86\end{pmatrix}$$

⇒ 1550 m Rohre und 86 Kopplungen

b) Kosten - Matrix $K=(4{,}5\quad 9{,}60)$ (Rohr/m, Kopp l./Stck)

A_{RK} - Rohstoffkosten - Matrix

$$A_{RK}=K\cdot A_{RE}=(4{,}5\quad 9{,}6)\cdot\begin{pmatrix}200&150&100\\8&6&10\end{pmatrix}$$

A_1 Kosten 976,80 €
A_2 Kosten 732,6 €
A_3 Kosten 546,0 €

$$\Omega=(976{,}80\quad 732{,}6\quad 546)$$

5c) Gesamtkosten $G_K = A_{RK} \cdot P$

$$G_K = \begin{pmatrix} 976,80 & 732,60 & 546,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{G_K = 7800,6\ €}$$