

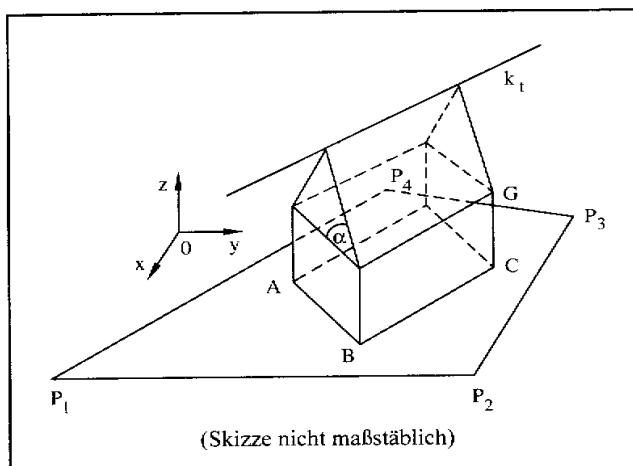


8. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2020/21; Analytische Geometrie (I)

Abgabe: 08.02.2021

1. Aufgabe:

Familie Baumann hat sich ein Grundstück gekauft und möchte darauf ein Eigenheim errichten. Das ebene, viereckige Grundstück wird durch die Grenzsteine $P_1(25; 0; 0)$, $P_2(x_2; y_2; 0)$, $P_3(-2; 36; 0)$ und $P_4(-5; 15; 0)$ markiert ($1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ m}$). Die Grenzsteine P_2 und P_4 liegen achsensymmetrisch zur Diagonale $\overline{P_1P_3}$.



- a) Berechnen Sie die Standortkoordinaten des Grenzsteines P_2 .
Welchen Grundstückspreis mußte Familie Baumann bezahlen, wenn der Quadratmeterpreis des erschlossenen Grundstücks 73 DM beträgt? (6 BE)

Das Eigenheim kann als Quader mit einem aufgesetzten, dreiseitigen, geraden Prisma angenommen werden. Der Punkt $C(4; 33; 0)$ ist ein Eckpunkt der Fundamentplatte. Jedes Haus des gewählten Typs hat eine Breite $\overline{AB} = 10 \text{ m}$ und eine Länge $\overline{BC} = 15 \text{ m}$. Die beiden Rechtecke des Daches liegen in Ebenen

$$E_t: 3tx + 4ty + 25z = 144t + 200 \quad \text{bzw.} \\ F_t: 3tx + 4ty - 25z = 94t - 200 \quad (t \in \mathbb{R}; t > 0).$$

Der Dachneigungswinkel α wird durch den Parameter t beeinflusst (siehe Skizze).

- b) Zeigen Sie, daß die Seitenwandhöhe \overline{CG} jedes solchen Hauses von der Wahl des Parameters t unabhängig ist, und berechnen Sie diese. (3 BE)
- c) In einer speziellen Ausführung des Projektes liegen die Dachflächen in den Ebenen E_5 bzw. F_5 .
Ermitteln Sie eine Gleichung der Dachfirstgeraden k_5 .
Weisen Sie nach, daß die Dachebenen E_5 und F_5 orthogonal zueinander sind.
Für die Finanzierung des Hauses wird der umbaute Raum (Gesamtvolumen des Hauses ohne Berücksichtigung der Wandstärken) benötigt.
Berechnen Sie für dieses spezielle Projekt den umbauten Raum. (5 BE)

- d) Um den umbauten Raum zu verkleinern, soll der Dachneigungswinkel α verringert werden. Als Auflage vom Bauamt muss dieser Winkel zwischen einschließlich 30° und 45° liegen. Berechnen Sie für diese Bedingungen das Intervall der möglichen Parameterwerte von t .



e) Zum Bau des Hauses wird ein Turmdrehkran mit horizontalem Ausleger verwendet. Der Kran soll so aufgestellt werden, dass die Grenzsteine P_1 , P_3 und P_4 gleichweit vom Standort des Kranes entfernt sind.

Berechnen Sie die Koordinaten des Kranstandortes und die erforderliche Auslegerlänge. Überprüfen Sie, ob durch solch einen Kran bei dieser Aufstellung das gesamte Grundstück erreicht werden kann.

2. Aufgabe:

2.) Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sind die Ebene

$$E: 2x + z - 3 = 0$$

und für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gerade

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Für welchen Wert von t ist die Gerade g_t parallel zu E ?
Ist g_t für dieses t in E enthalten?
Berechnen Sie für alle übrigen Werte von t den Schnittpunkt S_t von E und g_t .
Bestimmen Sie den Wert von t , für den g_t senkrecht zu E ist!

- b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_t mit der Geraden

$$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß der Vektor $\begin{pmatrix} t-2 \\ t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren von g_t und h_t ist.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_t , die die Geraden g_t und h_t enthält.
Für welche Werte von t geht diese Ebene durch den Ursprung?

- c) Für $t = -2$ ist E_{-2} durch die Koordinatengleichung $2x - z = 1$ gegeben. Berechnen Sie den Winkel zwischen E und E_{-2} .
Zeigen Sie, daß jeder Punkt der Ebene $x = 1$ von E den gleichen Abstand hat wie von E_{-2} .