



4. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2022/23; Integralrechnung

Abgabetermin
19.12.2022

1. Wiederholen Sie die Begriffe *Stammfunktion*, *unbestimmtes Integral*, *bestimmtes Integral* und *uneigentliches Integral*! Ordnen Sie diese Begriffe den folgenden Aufgaben zu und ermitteln Sie die Integrale!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int (t^3 + 1) \cdot t^2 dt & \text{b) } \int \frac{-1}{3x\sqrt{x}} dx & \text{c) } \int \frac{3x}{6x^2 - 8x} dx & \text{d) } \int_{-1}^0 \sqrt[3]{(2x+5)^2} dx \\ \text{e) } \int_0^{\pi} (\sin^2 x) dx & \text{f) } \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + 1\right) dx & \text{g) } \int \frac{3}{\sqrt{1-3x}} dx & \text{h) } \int \frac{x^3 - 6x^2}{x^3} dx \\ \text{i) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{x^5} dx & \text{j) } \int (e^{3x-1}) dx & \text{k) } \int (e^x)^2 dx & \text{l) } \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array}$$

2) Berechnen Sie a ($a > 1$) so, dass gilt: $\int_1^a \frac{1}{3x-1} dx = 0,1$.

3) Zeigen Sie rechnerisch, dass $F_a(x) = e^{ax} \left(\frac{2x-1}{a} - \frac{2}{a^2} \right)$ eine Stammfunktion von f_a mit $f_a(x) = (2x-1)e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R}_+$) ist.

4) Welche Parabel $K: y = c - x^2$ ($c > 0$) schließt mit der x -Achse eine 2 FE große Fläche ein?

5) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat bei $x=1$ einen Hochpunkt, bei $x=2$ einen Wendepunkt und schließt mit der x -Achse eine Fläche ein, deren Inhalt 9 FE beträgt. Ermitteln Sie f rechnerisch.

6) Von welcher Funktion f ist $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ eine Stammfunktion?

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche im 1. Quadranten, die von f , einer Asymptote und den Geraden $g: x=0$ und $h: x=z$ ($z > 0$) begrenzt wird. Untersuchen Sie, ob dieser Flächeninhalt für $z \rightarrow \infty$ einen Grenzwert hat!

7) Der Graph der Funktion f_k mit $f_k(x) = k\sqrt{x} - 3x$ und die x -Achse begrenzen eine Fläche.

- a) Berechnen Sie den Inhalt. Für welchen Wert von k ergibt sich der Inhalt 8 FE?
b) Die Fläche mit 8 FE rotiert um die x -Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers?

8) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \left(\frac{x}{t} + 1 \right) \cdot e^{t-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

- a) Zeichnen Sie die Graphen von f_t und der Ableitungsfunktion f_t' im Bereich $[-1; 4]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. (1 LE = 1cm)
b) Zeigen Sie, dass für jedes $t > 0$ das Schaubild von f_t mit dem Schaubild von f_t' genau einen Punkt gemeinsam hat.
c) Die Graphen von f_t und f_t' schneiden aus der Geraden $g: x=1$ eine Strecke aus. Für welchen Wert von t ist die Länge dieser Strecke am kleinsten?
d) Das Schaubild K_1 , die x -Achse und die Gerade $g: x=u$ mit $u > -1$ schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie deren Inhalt $A(u)$ und den $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$.