



## 4. Prüfungskomplex - Mathe-Leistungskurs 2020/21; Integralrechnung

Abgabetermin  
16.11.2020

1. Wiederholen Sie die Begriffe *Stammfunktion*, *unbestimmtes Integral*, *bestimmtes Integral* und *uneigentliches Integral*! Ordnen Sie diese Begriffe den folgenden Aufgaben zu und ermitteln Sie die Integrale!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int (t^3 + 1) \cdot t^2 dt & \text{b) } \int \frac{-1}{3x\sqrt{x}} dx & \text{c) } \int \frac{3x}{6x^2 - 8x} dx & \text{d) } \int_{-1}^0 \sqrt[3]{(2x+5)^2} dx \\ \text{e) } \int_0^{\pi} (\sin^2 x) dx & \text{f) } \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + 1\right) dx & \text{g) } \int \frac{3}{\sqrt{1-3x}} dx & \text{h) } \int \frac{x^3 - 6x^2}{x^3} dx \\ \text{i) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{x^5} dx & \text{j) } \int (e^{3x-1}) dx & \text{k) } \int (e^x)^2 dx & \text{l) } \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array}$$

2) Berechnen Sie  $a$  ( $a > 1$ ) so, dass gilt:  $\int_1^a \frac{1}{3x-1} dx = 0,1$ .

3) Zeigen Sie rechnerisch, dass  $F_a(x) = e^{ax} \left( \frac{2x-1}{a} - \frac{2}{a^2} \right)$  eine Stammfunktion von  $f_a$  mit  $f_a(x) = (2x-1)e^{ax}$  ( $a \in \mathbb{R}_+$ ) ist.

4) Welche Parabel  $K: y = c - x^2$  ( $c > 0$ ) schließt mit der  $x$ -Achse eine 2 FE große Fläche ein?

5) Der Graph einer Funktion  $f$  mit  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  hat bei  $x=1$  einen Hochpunkt, bei  $x=2$  einen Wendepunkt und schließt mit der  $x$ -Achse eine Fläche ein, deren Inhalt 9 FE beträgt. Ermitteln Sie  $f$  rechnerisch.

6) Von welcher Funktion  $f$  ist  $F(x) = \sqrt{x^2+1}$  eine Stammfunktion?

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche im 1. Quadranten, die von  $f$ , einer Asymptote und den Geraden  $g: x=0$  und  $h: x=z$  ( $z > 0$ ) begrenzt wird. Untersuchen Sie, ob dieser Flächeninhalt für  $z \rightarrow \infty$  einen Grenzwert hat!

7) Der Graph der Funktion  $f_k$  mit  $f_k(x) = k\sqrt{x} - 3x$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche.

- a) Berechnen Sie den Inhalt. Für welchen Wert von  $k$  ergibt sich der Inhalt 8 FE?  
b) Die Fläche mit 8 FE rotiert um die  $x$ -Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers?

8) Für jedes  $t > 0$  ist eine Funktion  $f_t$  gegeben durch  $f_t(x) = \left( \frac{x}{t} + 1 \right) \cdot e^{t-x}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Zeichnen Sie die Graphen von  $f_t$  und der Ableitungsfunktion  $f_t'$  im Bereich  $[-1; 4]$  in ein gemeinsames Koordinatensystem. (1 LE = 1cm)  
b) Zeigen Sie, dass für jedes  $t > 0$  das Schaubild von  $f_t$  mit dem Schaubild von  $f_t'$  genau einen Punkt gemeinsam hat.  
c) Die Graphen von  $f_t$  und  $f_t'$  schneiden aus der Geraden  $g: x=1$  eine Strecke aus. Für welchen Wert von  $t$  ist die Länge dieser Strecke am kleinsten?  
d) Das Schaubild  $K_1$ , die  $x$ -Achse und die Gerade  $g: x=u$  mit  $u > -1$  schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie deren Inhalt  $A(u)$  und den  $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$ .