Ma-LK 12

Teil B: Geometrie/Algebra

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (s \in R)$,

für jedes a $(a \in R)$ eine Gerade h_a durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -6 \end{pmatrix} \quad (t \in R)$ sowie

für jedes k $(k \in R)$ eine Ebene E_k durch $(6k-3) \cdot x + 2 \cdot y + (2k-1) \cdot z = 6$ gegeben.

a) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g senkrecht schneidet.

Es existiert genau ein Wert k, für den die Gerade g in der Ebene E_k liegt.
Ermitteln Sie diesen Wert k.

Zeigen Sie, dass für jeden anderen Wert k die Ebene E_k parallel zur Geraden g liegt.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung zwischen den Geraden g und h_a in Abhängigkeit vom Parameter a.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

c) Ermitteln Sie alle Werte a, für die der Schnittwinkel zwischen der Geraden h_a und der x-y-Ebene $60°$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

d) Die Geraden g und h_{-4} verlaufen windschief zueinander.
Es existiert genau eine Gerade, die durch den Punkt $A(2; 3; 16)$ verläuft und die Geraden g und h_{-4} senkrecht schneidet.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Die Ebene E_k schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten S_{x_k}, S_{y_k} und S_{z_k}.
Diese drei Punkte und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

Ermitteln Sie alle Werte k $\left(k > \frac{1}{2}\right)$, für die das Volumen dieser Pyramide $\frac{3}{2}$ beträgt.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Ges.: 25 BE

(B)

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

ges.: Gerade l × g orthogonal

Da g parallel zur xz-Ebene verläuft folgt

für l: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (z.B.)

$g \in E_k$ für $k = ?$: g in E_k einsetzen Ziel: $0s = 0$!

$(6k-3)(2+s) + 2(3) + (2k-1)\cdot(-1-3s) = 6$

$12k + \cancel{6ks} - \cancel{6} - \cancel{3s} + \cancel{6} - 2k - \cancel{6ks} + 1 + \cancel{3s} = 6$

$10k + 1 = 6$

$10k = 5$

$k = \frac{1}{2}$ Korrekturweise: $k + 0s = \frac{1}{2}$

$0s = \underbrace{\frac{1}{2} - k}_{=0 \text{ für } k = \frac{1}{2}}$

(6)

$g \parallel E_k \ \forall k \neq \frac{1}{2}$:

wegen $10k + 1 = 6$ wahr für $k = \frac{1}{2}$ folgt

für $k \neq \frac{1}{2}$ eine falsche Aussage, somit liegt für

$k \neq \frac{1}{2}$ g nicht auf E_k und hat auch keine P. gemeinsam.

---

b) Lage g zu h_a:

1) $\vec{a} = r\vec{b}$ ⇝ $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}$ ⇝ $1 = 2r$, $r = \frac{1}{2}$; $0 = ar$; $-3 = -6r$, $r = \frac{1}{2}$

2) Annahme $a = 0$:

⇝ falls $a = 0$ folgt mit ebenfalls $r = \frac{1}{2}$ ⇒ $g \parallel h$ od. $g \equiv h$

Punktprobe $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}$ ⇝ $t = \frac{1}{2}$; $t =$ n.d. ↯; $t = \frac{5}{6}$

⇝ falls $a \neq 0$ folgt mit $r = \frac{1}{2}$ ⇒ $g \times h$ od. g w h

für $a = 0$ gilt: $g \parallel h$

Annahme $a \neq 0$: „$g = h_a$"

$2 + s = 1 + 2t$ → $1 + s = 2t$ ⇝ $s = 2t - 1$

$3 = a + at$

$-1 - 3s = 4 - 6t$ ⇝ $-1 - 3(2t-1) = 4 - 6t$

$-1 - 6t + 3 = 4 - 6t$

$2 = 4$ ↯ ⇝

(5)

für $a \neq 0$ gilt g w h

c) $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\a\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix}$ (5)

xy-Eb. $\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\sin \sphericalangle (h_a, xy\text{-}E) = \left| \frac{\vec{b} \circ \vec{n}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\left| \frac{\begin{pmatrix}2\\a\\-6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{4+a^2+36} \cdot 1} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\left| \frac{-6}{\sqrt{40+a^2}} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$ (4)

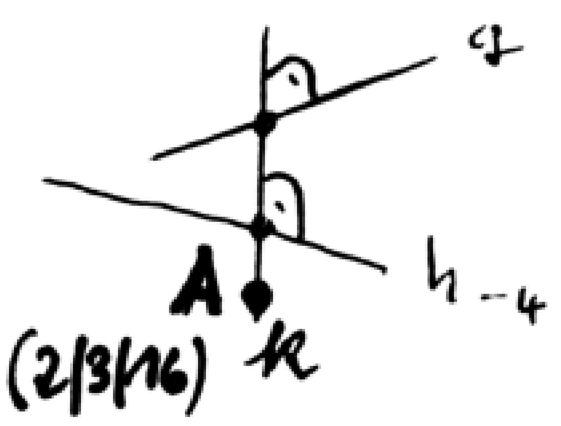
$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \sqrt{40+a^2} \quad | (\,)^2$$

$$48 = 40 + a^2$$

$$a^2 = 8 \Rightarrow \underline{a_{1,2} = \pm\sqrt{8}}$$

---

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$; $h_{-4}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$; g w h_{-4}



g und h_{-4} spannen mit ihren Richtungsvektoren die Ebene E^* auf. Der Normalenvektor dieser Ebene und der Punkt A bilden die Gerade k: (3)

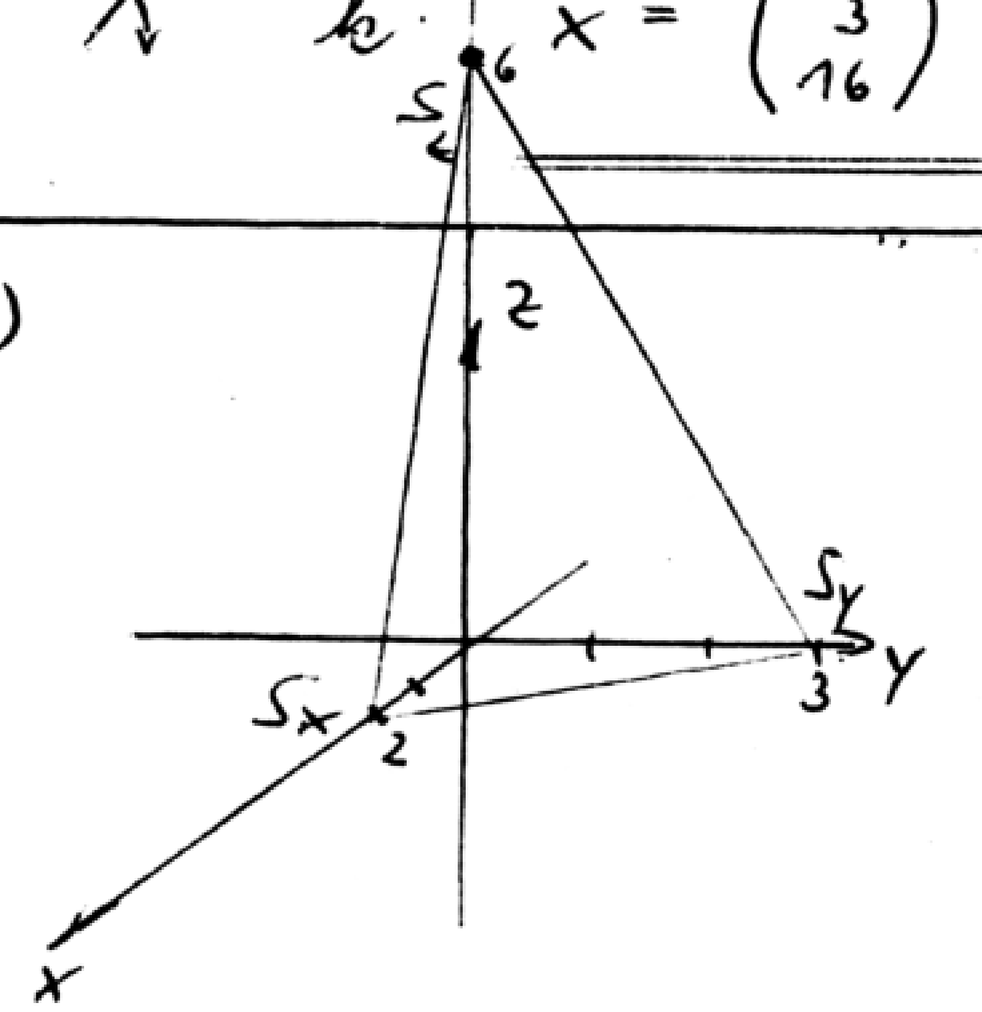
$$E^*: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{k: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\16\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}}$$

---

e)



$E_k: (6k-3)x + 2y + (2k-1)z = 6$

$S_{xk}\left(\frac{6}{6k-3} \middle| 0 \middle| 0\right)$ Bsp. $S_{x_1}(2|0|0)$

$S_{yk}(0|3|0)$ $S_{y_1}(0|3|0)$

$S_{zk}\left(0 \middle| 0 \middle| \frac{6}{2k-1}\right)$ $S_{z_1}(0|0|6)$

$V = \frac{3}{2} = \frac{1}{3} A_G \cdot h \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{6}{6k-3}\right) \cdot 3 \cdot \left(\frac{6}{2k-1}\right)$

NR: $A_G = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{6k-3}\right) \cdot 3$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{(6k-3)(2k-1)}$$

$$36 = 3(6k-3)(2k-1)$$

$$12 = (6k-3)(2k-1) \Rightarrow \text{GTR}$$ (7)

$$\underline{(k_1 = -0{,}5) \quad k_2 = 1{,}5}$$