② D1

a) Nst.: $0 = t\sin(tx) + t \quad ; \quad t>0 \; ; \; x>0$

$0 = \sin(tx) + 1$

$\sin tx = -1$

$tx = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$

$\underline{x_0 = \frac{3\pi}{2t} + \frac{2\pi k}{t}}$ mit $k \in \mathbb{N}$

Extr.: $f_t'(x) = t^2\cos(tx)$

n. B.: $0 = \cos tx$

$\underline{x_E = \frac{\pi}{t}\left(\frac{1}{2} + k\right)}$

$f_t''(x) = -t^3\sin(tx)$

h. B.: $f_t''\left(\frac{\pi}{t}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right) = \underbrace{-t^3}_{<0} \cdot \underbrace{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}_{\substack{\text{für } k \text{ ungerade: } -1 \\ \text{für } k \text{ gerade: } +1}}$

$\curvearrowright$ k ungerade: $f_t''(\dots) > 0 \curvearrowright$ Min

k gerade: $f_t''(\dots) < 0 \curvearrowright$ Max.

$\curvearrowright P_{Max}\left(\frac{\pi}{t}\left(\frac{1}{2}+k\right) \,\middle|\, t\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)\right) + t\right)$

$= \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{\pi}{t}\left(\frac{1}{2}+k\right) \,\middle|\, 2t\right)}}$

bzw. $\underline{\underline{P_{Min}\left(\frac{\pi}{t}\left(\frac{1}{2}+k\right) \,\middle|\, 0\right)}}$

---

b) $A = \int_{\frac{\pi}{t}\left(\frac{3}{2}\right)}^{\frac{\pi}{t}\left(\frac{3}{2}+2\right)} t\sin(tx) + t \, dx$

$x_{0_1} = \frac{3}{2}\frac{\pi}{t} + \frac{2\pi}{t}\cdot 0 \quad (k=0)$

$x_{0_2} = \frac{3}{2}\frac{\pi}{t} + \frac{2\pi}{t}\cdot 1 \quad (k=1)$

$= \left[-\cos(tx) + tx\right]_{\dots}^{\dots}$

$= \left(-\underbrace{\cos\left(\frac{7}{2}\pi\right)}_{=0} + \frac{7}{2}\pi - \left(-\underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=0} + \frac{3}{2}\pi\right)\right)$

$= \frac{7}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi$

$\underline{\underline{= 2\pi \text{ FE}}}$

(2)

c) Wendepunkt:

n.B. $f_t''(x) = 0 = -t^3 \sin(tx)$

$0 = \sin(tx)$

$x_{w_t} = \frac{\pi k}{t}$ für $k = 1$ folgt: $\underline{\underline{x_{w_t} = \frac{\pi}{t}}}$

$d^2(t) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 + \left(t \sin\pi + t\right)^2$

TR → oder:

$[d^2(t)]' = -\frac{2\pi^2}{t^3} + 2t$

n.B. $0 = -2\pi^2 + 2t^4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t_{1,2} = \pm\sqrt{\pi}}}$

(ohne Nachweis)

d) ges: alle Werte t, für die f_t in $0 \leq x \leq 2\pi$ mindestens 8 Nullstellen hat.

Nst.: $x_0 = \frac{\pi}{t}\left(\frac{3}{2} + 2k\right)$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{\pi}{t}\left(\frac{3}{2} + 2k\right) \leq 2\pi$ mit den 8 Nullstellen für $k = 0, 1, 2, \dots, 7$

$\Leftrightarrow$ für $k = 7$:

$0 \leq \frac{\pi}{t}\left(\frac{3}{2} + 14\right) \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{\pi}{t}(15{,}5) \quad \wedge \quad \frac{\pi}{t}(15{,}5) \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \pi(15{,}5) \quad \underline{\underline{\wedge \quad t \geq 7{,}75}}$

wahr