

Teil A

1.1 $f(x) = 4x^2 + 3x$

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C \quad \text{mit } F(1) = 3 \text{ folgt}$$

$$3 = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + C$$

$$3 = \frac{8+9}{6} + C$$

$$\frac{18}{6} - \frac{17}{6} = C \quad \wedge \quad C = \frac{1}{6} \rightarrow F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6} \quad \underline{\underline{2. Punkt}}$$

1.2. $f(x) = \begin{cases} 2x-a & ; x \leq 1 \\ 3 & ; x > 1 \end{cases}$

$$\text{stetig bei } x_0 = 1: \quad \begin{aligned} 2x_0 - a &= 3 \\ 2 - a &= 3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

2. Punkt

1.3. Tangentengleichung g zu h:

$$g: \underline{y = 2x - 4} \quad ; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

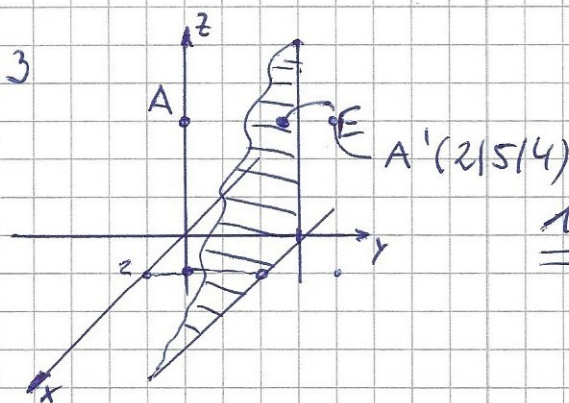
$$h: m = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

 $\wedge$ g x h orthogonalda $m = -\frac{1}{m}$ gilt

$$P_0 \rightarrow 1 = 4$$

$$\wedge \quad \underline{y = -\frac{1}{2}x + 1} \quad \underline{\underline{3. Punkt}}$$

1.4. geg.: A(2|1|4) E: y=3

1. Punkt

1.5. geg.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

ges.: B für $A \cdot B$

Lös.: Matrix B muss mit A verträglich sein

 $\wedge$ Matrix B muss 3 Zeilen besitzen3. Punkt

2.1. geg.: $f_a(x) = e^{-ax}$; $a > 0$

ges.: Nachweis: f_a hat keine Extremstelle

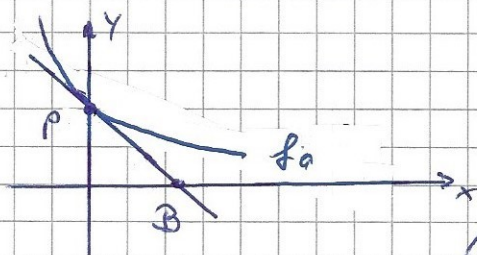
Lös.: $f_a'(x) = -ae^{-ax}$

uB.: $0 = -ae^{-ax}$ $:(-a)$

$a \neq 0$

$0 \neq e^{-ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ w.z.z.w. ✓

2.2.



$f_a'(x) = -ae^{-ax}$

$m = f_a'(0) = -a$ ✓

↗ Tangentl. $y = -ax + 1$ ✓

$B \rightarrow 0 = -a \cdot 3 + 1$

$3a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$ ✓

3.1. geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2r \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ r \end{pmatrix}$

ges.: r , falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Lös.: $\begin{pmatrix} 2r \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ r \end{pmatrix} = 0$ ✓

$4r - 5 + r = 0 \rightarrow r = 1$ ✓

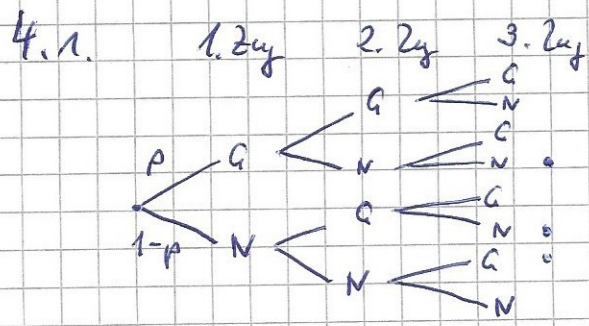
3.2. geg.: $\vec{a}, \vec{b}$

ges.: $\vec{a} = t\vec{b}$ lin. abh.?

Lös.: $\begin{pmatrix} 2r \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ r \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2r = 2t & \rightarrow r = t \\ -1 = 5t & \rightarrow t = -\frac{1}{5} \\ 1 = rt & \rightarrow 1 = -\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \end{matrix}$

↳ gibt kein r ✓

$1 \neq \frac{1}{25} \quad \Downarrow$



Ereignisse sind unabhängig!

E: genau 1 Gewinn los gezogen

$$P(E) = p \cdot (1-p)^2 \cdot 3 = 3p(1-2p+p^2) = \underline{3p - 6p^2 + 3p^3}$$

4.2 ges. $P(E) \rightarrow \text{Max}$

Lös.: $P(E) = 3p^3 - 6p^2 + 3p$

$$P'(E) = 9p^2 - 12p + 3$$

n.B.: $0 = 9p^2 - 12p + 3 \quad | :9$

$$0 = p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{1}{3}$$

$$0 = p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{1}{3}$$

$$p_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}}$$

$$p_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \quad \wedge \quad \underline{p_1 = 1} \quad \wedge \quad \underline{p_2 = \frac{1}{3}}$$

$$P''(E) = 18p - 12$$

n.B.: $P''(1) = 18 - 12 = 6 > 0 \rightarrow \text{Min}$

$$P''(\frac{1}{3}) = 6 - 12 = -6 < 0 \rightarrow \text{Max}$$

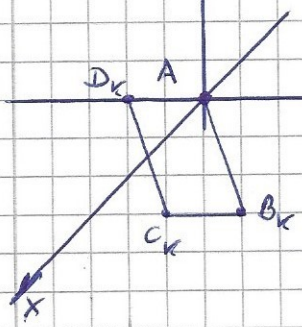
$\wedge$ Für $P(E) = \frac{1}{3}$ ist die Wkt. am größten ✓

5.1

ges.: $AB_k C_k D_k$ ist für jedes k ein Parallelogramm

Lös.: $\overrightarrow{AB_k} = \overrightarrow{D_k C_k}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -k \end{pmatrix} \quad \text{w.z.b.w.}$$



5.2: Da $\overrightarrow{AB_k} \times \overrightarrow{AD_k}$ ein Normalenvektor der Grundfläche ist, gilt für diese die Berührung

$$\vec{n} = s \cdot \overrightarrow{AE} \quad \wedge \quad \vec{n} \perp \text{ u. } \overrightarrow{AE} \text{ lin. abh., also parallel}$$

Teil B - Lösung

(4)

1.1. geg.: $f(x) = \frac{3}{50}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + 2x$; $0 \leq x \leq \frac{20}{3}$, $1 = 100$ Meter
 $R(S(f(5))); S(\frac{20}{3}|0)$

• ges.: Verlauf im WP der Fkt. f

Lös.: $f'(x) = \frac{9}{50}x^2 - \frac{14}{10}x + 2$

$f''(x) = \frac{18}{50}x - \frac{14}{10}$ ✓

u.B.: $0 = \frac{18}{50}x - \frac{14}{10} \quad | \cdot 50$

$0 = 18x - 70$

$x_w = \frac{70}{18} = \frac{35}{9} = \underline{\underline{3,8\overline{3}}}$ ✓

(6)

Wert bei x_w : $\underline{\underline{CP: f'(\frac{35}{9}) \approx -0,72 = -\frac{13}{18}}}$ ✓

• ges.: Intervall $I[x_1|x_2]$ mit $m \leq -0,7$

Lös.: $m = f'(x) = \frac{9}{50}x^2 - \frac{14}{10}x + 2 \leq -0,7$ ✓

Solve($m \leq -0,7, x$) $\leadsto \frac{35 - \sqrt{10}}{9} \leq x \leq \frac{35 + \sqrt{10}}{9}$ ✓
 $3,54 \leq x \leq 4,24$

1.2. geg.: $f(x)$; R, S

• ges.: max. Wassertiefe in 24m $\rightarrow$ Nachweis

$\leadsto$ Tiefpunkt der Fkt. f

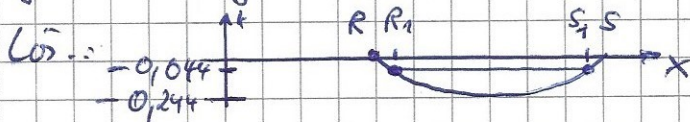
(3)

Lös.: CP: Graphik-Menu, Analyse, Minimum ✓

$\leadsto P_{\min}(5,89 | -0,244) \leadsto y = -0,244 \quad | \cdot 100$

$Tief_{\max} \approx 24$ m ✓

• ges.: Länge der Profillinie bei einer Wassertiefe von 20 cm



(3)

Punkte R_1 und S_1 finden, für die gilt

$f(x_{R_1}) = f(x_{S_1}) = -0,044$

CP: x berechnen in Graphik-Menu

$x_{R_1} = 5,09$; $x_{S_1} = 6,597$

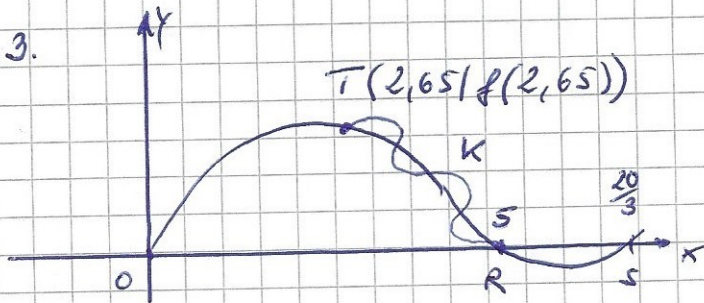
$x_{R_1} \approx 5,1$

$x_{S_1} \approx 6,6$

$\leadsto \underline{\underline{R_1 S_1 = 1,5 \hat{=} 150$ m}

(5)

1.3.



geg.: Kleinstreis K ist 25% länger als Länge Bogen $\widehat{RT}$

ges.: Länge K

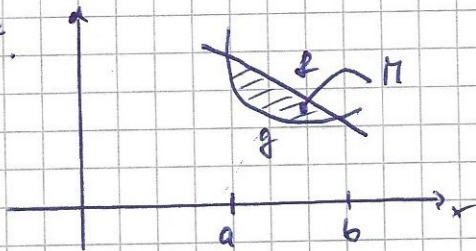
Lös.: $K = \widehat{RT} + \frac{1}{4} \cdot \widehat{RT}$

(5)

$$\begin{aligned} \text{NR: } \widehat{RT} &= \text{arclen}(f(x), x, x_T, x_R) \quad \checkmark \quad \text{CP!} \\ &= 2,7925 \quad (\cdot 100) \quad \checkmark \\ &\hat{=} \approx 279 \text{ m} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$K = 279 \text{ m} + \frac{1}{4} \cdot 279 \text{ m} = 348,75 \approx \underline{\underline{349 \text{ m}}} \quad \checkmark$$

1.4.

geg.: $f(x)$

$$g(x) = \frac{140}{105x - 224} \quad \text{in }]a|b]$$

$$\rho_H = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$l_R = 50 \text{ m}$$

ges.: m_H

(6)

Lös.: Ber. der Querschnittsfläche M

1) Schnittstellen a und b :

$$f(x) = g(x) \rightarrow \text{CP: SOLVE}(f(x) = g(x), x) \quad \checkmark$$

$$\underline{a = 3,33} \quad ; \quad \underline{b = 3,73} \quad \checkmark \quad (\text{Zweite Lösung } \notin])$$

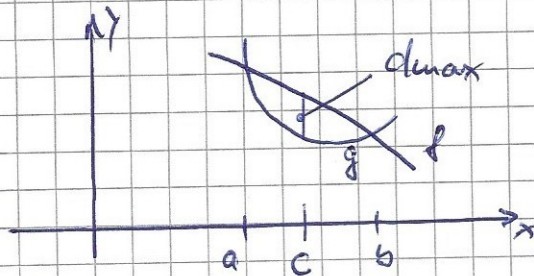
2) Querschnittsfläche

$$M = \int_a^b f(x) - g(x) dx = 0,00579 \stackrel{\cdot 100 \cdot 100!}{=} 57,9 \text{ m}^2 \quad \checkmark \quad \text{da } 1 \text{ LE} = 100 \text{ m}^2$$

3) Masse

$$m_H = \rho \cdot V = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 57,9 \text{ m}^2 \cdot 50 \text{ m} = 7816500 \text{ kg} \approx \underline{\underline{7816 \text{ t}}} \quad \checkmark$$

1.5.

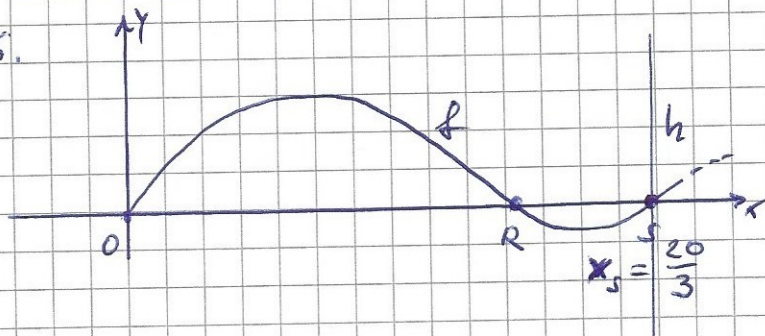
geg.: $f(x), g(x)$ a, b ges.: $d_{\max}$ bei c !Lös.: $d_{\max} \rightarrow \text{Max}$

$$d_{\max} = h(c) = f(c) - g(c) \quad \checkmark \quad \text{CP-Graph-Menü}$$

$$c_{\max} \approx 3,52 \hat{=} 353 \text{ m von } 0 \text{ entfernt} \quad \checkmark$$

$$\text{mit einer } d_{\max} \approx 0,022 \hat{=} \underline{\underline{2,2 \text{ m}}} \quad \checkmark$$

1.6.

geg.: Eigenschaften h :

- f gilt in S
- tangentiel in h über

$$h''(x) = -\frac{1}{5}$$

ges.: Extrempunkt für h Lös.: h ist ganzrational, 2. Gradesda $h'' = \text{const}$, ist h vom 2. Grad:

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

$$h'(x) = 2ax + b$$

$$1) \quad h''(x) = 2a = -\frac{1}{5} \quad \leadsto \quad \underline{\underline{a = -\frac{1}{10}}} \quad \checkmark$$

$$2) \quad h'(x) = f'\left(\frac{20}{3}\right) = 2a \cdot \frac{20}{3} + b$$

$$f'\left(\frac{20}{3}\right) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{20}{3} + b$$

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{20}{3} + b \quad \checkmark$$

$$\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} + b \quad \leadsto \quad \underline{\underline{b = 2}} \quad \checkmark$$

$$3) \quad h\left(\frac{20}{3}\right) = f\left(\frac{20}{3}\right) = ax^2 + bx + c$$

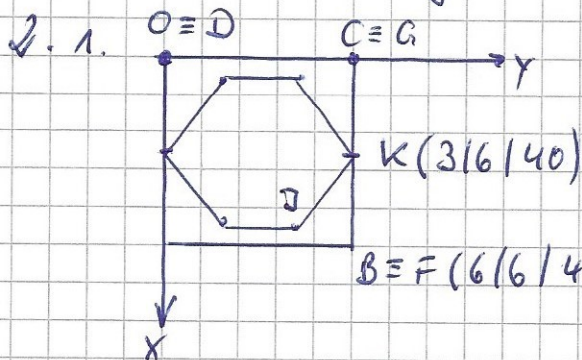
$$0 = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{20}{3} + c$$

$$0 = -\frac{40}{9} + \frac{40}{3} + c \quad \leadsto \quad \underline{\underline{c = -\frac{80}{9}}} \quad \checkmark$$

$$h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x - \frac{80}{9} \quad \checkmark \quad \leadsto \quad \underline{\underline{P_H\left(\frac{10}{3} \mid \frac{10}{9}\right)}} \quad \checkmark \quad \text{CP!}$$

Teil B2 - Lösungen

7



geg.: Quader ABCDEFGH

Pyramide IJKLMNS

$K(3/6/40); J(3+1,5\sqrt{3}/4,5/40)$

$B \equiv F(6/6/40) \leadsto$ Der Quader ist quadratisch

Lös.: • Da die Front- u. Deckfläche des Quaders quadratisch ist und parallel zu den Achsen ausgerichtet ist, folgt mit $G(0/6/40)$ und $F(6/6/40)$ der Seitenmittelpunkt $K(3/6/40)$.

• Die Seitenlänge $\overline{JK}$ ist bestimmbar als $|\overline{JK}|$.

$$\begin{aligned} |\overline{JK}| &= \sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2 + (z_K - z_J)^2} \\ &= \sqrt{(3 - (3 + 1,5\sqrt{3}))^2 + (6 - 4,5)^2 + (40 - 40)^2} \quad \text{CP!} \\ &= \sqrt{6,75 + 2,25} = 3 \text{ LE} = \underline{\underline{3 \text{ m}}} \end{aligned}$$

2.2. geg.: $S(3/3/67)$ ges.: $\angle(E(JKS), xy\text{-E})$

Lös.: $E(JKS)$ bestimmen!

$$E: \vec{x} = \vec{OK} + r(\vec{KJ}) + s(\vec{KS})$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 40 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1,5\sqrt{3} \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1,5\sqrt{3} & 0 \\ \vec{j} & -1,5 & -3 \\ \vec{k} & 0 & 27 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 40,5 \\ 70,15 \\ 7,79 \end{pmatrix} \quad \text{cross P!}$$

und die xy -Ebene hat den Normalenvektor:

$$\underline{\underline{\vec{n}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\leadsto \cos \angle(E, xyE) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{xy}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{xy}|} = \frac{|7,79|}{21,37 \cdot 1} = 0,365 \leadsto \underline{\underline{\angle \approx 68,5^\circ}}$$

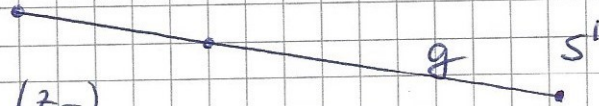
2.3. geg.:

T

S

ges. T

(8)



$$T(-15|y_T|z_T)$$

$$S(3|3|67)$$

$$S'(48|-19,5|34,5)$$

Lös.: T liegt auf g - Punktmprobe!

(5)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 67 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 45 \\ -22,5 \\ -32,5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$T \rightarrow \begin{pmatrix} -15 \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 67 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 45 \\ -22,5 \\ -32,5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\rightarrow$ LGS

$$\begin{aligned} -15 &= 3 + 45r \\ y_T &= 3 - 22,5r \\ z_T &= 67 - 32,5r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow r &= -0,4 \checkmark \\ \rightarrow y_T &= 12 \checkmark \\ \rightarrow z_T &= 80 \checkmark \end{aligned}$$

$$\rightarrow T(-15|12|80) \checkmark \checkmark$$

2.4.

geg.:

$$(I): \rightarrow \vec{SK} \checkmark$$

$$(II): \rightarrow \vec{SJ} \checkmark$$

$$(III) \cos \alpha = \frac{\vec{SK} \cdot \vec{SJ}}{|\vec{SK}| \cdot |\vec{SJ}|} \checkmark$$

$$\alpha = 6,3^\circ$$

liefert Winkel zw. $\vec{SK}$ u. $\vec{SJ}$

bzw Winkel zw. SK u. SJ

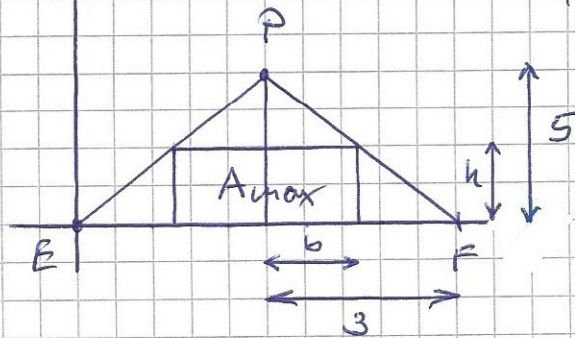
Lös.: Bestimme Winkel zw. Pyramidenkanten SK u. SJ . $\checkmark$

(4)

2.5.

„Dachbodenproblem“

9



A → Max

Lös.: AE $A = 2b \cdot h = f(b, h)$ ✓

NB: 11. Strahlensatz gilt:

$$\frac{5}{3} = \frac{5-h}{b} \quad \wedge \quad b = \frac{3(5-h)}{5}$$

$$\begin{aligned} A &= f(h) = 2 \left(\frac{3(5-h)}{5} \right) \cdot h \\ &= \frac{6}{5} (5-h) \cdot h \\ &= \left(6 - \frac{6}{5}h \right) h \quad \checkmark \end{aligned}$$

ZF $A = f(h) = 6h - \frac{6}{5}h^2$

$$A' = f'(h) = 6 - \frac{12}{5}h \quad \checkmark$$

NB $0 = 6 - \frac{12}{5}h$

$$\frac{12}{5}h = 6$$

$$h = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = \underline{2,5 \text{ m}} \quad \checkmark$$

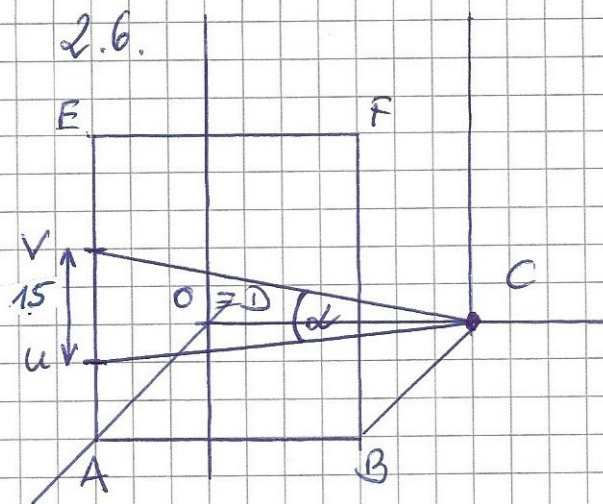
$$A'' = f''(h) = -\frac{12}{5}$$

$$f''(2,5) = -\frac{12}{5} < 0 \rightarrow \text{Max!}$$

$$b = \frac{3(5-2,5)}{5} = \frac{7,5}{5} = \underline{1,5 \text{ m}}$$

→ Rechteck: 3 × 2,5 m² groß ✓

(6)



geg.: $U(6|0|z_u)$

$V(6|0|z_u+15)$ ✓

$C(0|6|0)$

$\alpha = 30^\circ$; $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ges.: z_u

Los.: Winkel ber. zw. 2 Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{CU} \cdot \vec{CV}|}{|\vec{CU}| \cdot |\vec{CV}|} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \checkmark$$

$$\vec{CU} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{CV} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ z+15 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad z_u = z! \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{|36 + 36 + z(z+15)|}{\sqrt{36 + 36 + z^2} \cdot \sqrt{36 + 36 + (z+15)^2}} \quad \checkmark$$

$$\underline{z_1 \approx 6,81}; \quad (z_2 \approx -21,81)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{U(6|0|6,81)}; \quad V(6|0|21,81)} \quad \checkmark \quad \checkmark$$