

Lösung - Teil A

(1)

1.1. $f(x) = \ln(2x-1) \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} \rightarrow f'(1) = \underline{2}$ 4. Punkt ✓

1.2. $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \rightarrow$ Polynom bei $x=2; x=-2$
 vorgegebene Asy: $y=1$ 2. Punkt ✓

1.3. $E: x+3y+2z=0 \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 falls $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ gilt $g \parallel E$
 $\rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1+3-2=0 \right.$
 4. Punkt ✓

1.4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
 $\vec{n} \cdot \vec{c} = \text{Zahl (Skalarprodukt)}$ 4. Punkt ✓

1.5. Werfen Reißzwecke

$k \rightarrow 0,16$; da unabhängige Ereignisse gilt für
 $\left. \begin{matrix} k \leftarrow k \rightarrow 0,16 \\ s \leftarrow s \rightarrow 0,84 \end{matrix} \right\} 0,84$ $P(k) = 0,4$ 3. Punkt ✓

(10)

2. geg.: $f_k(x) = (k-2x)e^x$; $k > 0$

2.1. ges.: lokales Extremum

Los.: $f'_k(x) = (-2) \cdot e^x + (k-2x)e^x = \underline{e^x(-2+k-2x)}$ ✓

n.B.: $0 = e^x(-2+k-2x)$

$\neq 0 \rightarrow 0 = -2+k-2x$

$2x = k-2$

$\underline{x_E = \frac{1}{2}k-1}$ ✓

$\wedge y_E = (k-2 \cdot \frac{1}{2}k+2)e^{\frac{1}{2}k-1}$

$\underline{y_E = 2e^{\frac{1}{2}k-1}}$ ✓

(3)

ist das
 Extremum?

$f''_k(x) = e^x(-2+k-2x) + e^x(-2) = \underline{e^x(-4+k-2x)}$

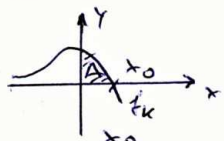
n.B.: $f''_k(\frac{1}{2}k-1) = e^{\frac{1}{2}k-1}(-4+k-k+2) = e^{\frac{1}{2}k-1} \cdot (-2) < 0$

$\rightarrow \underline{P_H(\frac{1}{2}k-1 | 2e^{\frac{1}{2}k-1})}$

2.2. geg.: $F_k(x) = (k+2-2x)e^x$; $k > 0$

(2)

ges.: A in Abh. von k

los.:  2. B. für k=1 skizzieren

$$A = \int_0^{x_0} (k+2-2x)e^x dx$$

$$A = \left[(k+2-2x)e^x \right]_0^{\frac{1}{2}k}$$

Nr: Nullstelle x_0 :

$$0 = (k+2-2x)e^x$$

$$0 = k+2-2x \quad \neq 0$$

$$2x = k+2$$

$$x_0 = \frac{1}{2}k$$

(3)

$$A = \left((k+2-2 \cdot \frac{1}{2}k) \cdot e^{\frac{1}{2}k} \right) - \left((k+2-2 \cdot 0) e^0 \right)$$

$$A = \left(2e^{\frac{1}{2}k} - (k+2) \right) = \underline{2e^{\frac{1}{2}k} - k - 2 \text{ FE}}$$

3. geg.: $A(4|2|6)$; $B(2|0|8)$; $C_a(0|a|4)$; $a \in \mathbb{R}$

3.1. ges.: ABC_a sind $\forall a \in \mathbb{R}$ Eckpunkte eines Dreiecks

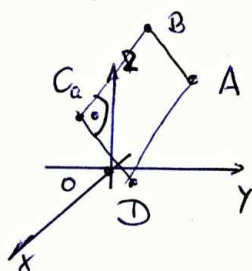
los.: $g(AB)$ aufstellen, Nachweis: $C_a \notin g(AB)$

$$g(AB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C_a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = 4 - 2t \wedge t = 2 \\ a = 2 - 2t \\ 4 = 6 + 2t \wedge t = -1 \end{matrix}$$

$$\underline{C_a \notin g(AB)}$$

3.2. ges.: ①



$$\text{los.: } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}_a$$

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+a \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{D}(2|2+a|2)$$

$$\text{und } \vec{BC}_a \circ \vec{DC}_a = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ a \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 4 - 2a - 8 = 0$$

$$-2a = 4 \rightarrow \underline{a = -2}$$

(5)

4. Urne mit 3s, 5r, 2g Kugeln
Ziehen 2 Kugeln ohne Zurücklegen

A: Keine der beiden Kugeln ist rot

B: beide Kugeln haben die gleiche Farbe

ges.: $P(A)$; $P(B)$

Lös.: $P(s) = \frac{3}{10}$ bei einmalig Ziehen

$$P(r) = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$P(g) = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{keine rote}) + P(\text{keine rote}) \quad \text{ohne Zurücklegen} \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(r) \cdot P(r) + P(s) \cdot P(s) + P(g) \cdot P(g) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{20}{90} + \frac{6}{90} + \frac{2}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45} \end{aligned}$$

5. $P(x) = -2 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 = -0,5 + 0,25 + 1$

$P(x) = 0,75$

Lösung Teil B1

(4)

geg.: Körpermassenfunktion $m_k = f(t) = \frac{9}{1 + 35e^{-kt}}$
 $t \geq 0, k \in \mathbb{R}^+$

1.1. ges.: Körpermasse Raubardardel mit $k=0,9$ in Kg
 für $t=0$ (Geburt); t in Monaten

lös.: $f(0) = \frac{9}{1 + 35e^0} = \frac{9}{36} = \underline{0,25 \text{ Kg}}$

• ges.: Körpermasse für $t=5$

lös.: $f(5) = \frac{9}{1 + 35e^{-0,9 \cdot 5}} \approx \underline{6,48 \text{ Kg}}$
 CP

Nachweis der 26 faden Masse: $\frac{6,48 \text{ Kg}}{0,25 \text{ Kg}} \approx \underline{26}$

• ges.: t für $m \approx 4,6 \text{ Kg}$

lös.: $f(t) = \frac{9}{1 + 35e^{-0,9t}} = \underline{4,6 \text{ Kg}}$

E: CP: Menü Mai

V: SOLVE (Gleichung, t)

A: $t \approx 4$ Monate nach Geburt

(7)

1.2. geg.: Massenzunahme innerhalb von 2 Monaten um 2 Kg

ges.: Zeiträume mit Anfangszeitpunkt t_1

lös.: $f(t+2) - f(t) = \underline{2 \text{ Kg}}$

E: CP: Menü - Menü

V: SOLVE (Gleichung, t)

A: $t_1 \approx \underline{0,92 \text{ Monate}}$ bis $t_{1a} = \underline{2,92 \text{ Monate}}$

$t_2 \approx \underline{4,98 \text{ Monate}}$ bis $t_{2a} \approx \underline{6,98 \text{ Monate}}$

(4)

1.3. ges.: Zeitpunkt der stärksten Zunahme der Körpermasse

(5)

Lös.: Bestimmung der größten Steigung von $m = f(t)$

$m' \rightarrow \text{Max}$ ✓

$$m = f(t) = \frac{9}{1 + 35 \cdot e^{-0,9t}} \quad \text{Sonderfall Quotientenregel zum Ableiten}$$

$$m' = f'(t) = -9 \cdot \frac{35 \cdot e^{-0,9t} \cdot (-0,9)}{(1 + 35 e^{-0,9t})^2} \quad \checkmark$$

E: CP: $f'(t)$ im Grafikrechner

V: $f'(t)$ zeichnen, Analyse $\rightarrow$ Max. bestimmen ✓

A: $t_{\text{max}} = \underline{3,95}$ Monate nach der Geburt ✓

$m'_{\text{max}} \approx \underline{2,03}$ kg pro Monat ✓

(5)

1.4. ges.: Begründung: Masse nimmt immer zu

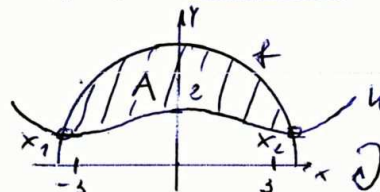
Lös.: $f(t)$ ist monoton wachsend $\rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$

$$f'(t) = -9 \cdot \frac{35 \cdot e^{-0,9t} \cdot (-0,9)}{(1 + 35 e^{-0,9t})^2} = \frac{283,5 e^{-0,9t}}{(1 + 35 e^{-0,9t})^2} > 0$$

- da e^2 immer > 0 ist
 $\rightarrow$ monoton wachsend ✓

• ges.: $m = f(t) \leq 9 \text{ kg}$ für $t \rightarrow \infty$

$$\text{Lös.: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{9}{1 + 35 e^{-0,9t}} = \frac{9}{1 + 0} = \underline{9 \text{ kg}} \quad \checkmark$$



(4)

1.5. geg.: $g(x) = \sqrt{12,25 - x^2}$
 $h(x) = 0,01x^4 - 0,2x^2 + 2,0$

• ges.: V_{rot}, m x_1, x_2

Lös.: $V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 - [h(x)]^2 dx$; Nr: Schnittstelle x_1, x_2

CP: E: $g(x), h(x)$

V: Graph: Durchschnitt

A: $x_1 = -3,35$

$\sim x_2 = 3,35$ ✓

C: E: $V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 - [h(x)]^2 dx$

V: Main: Berechnung V_{rot}

A: $V_{\text{rot}} \approx \underline{128,78 \text{ cm}^3}$ ✓

$\rightarrow m = \rho \cdot V = 0,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 128,78 \text{ cm}^3 \approx \underline{118,48 \text{ g}}$ ✓

Lösungen Teil B2

6

2.1. geg.: Beginn der Beobachtung

F1: $P_1(4,7 | 76,9 | 8,5)$, nach 1 Minute: $Q_1(17,6 | 81,2 | 8,5)$

F2: $P_2(-13,8 | 73,8 | 10,3)$ " $Q_2(0,0 | 78,0 | 9,9)$

• ges.: Flughöhe F1

Lös.: 8,5 km über Meeresspiegel ✓ (aus z-Koord. abgelesen) ✓

• ges.: Flughöhe F2 vor Minute nach Beobachtungsbeginn

Lös.: $v = \text{Konstant} \rightarrow$ Höhen-Zahlenfolge in Minuteabständen:

$$(h_t) = (10,3 | 9,9 | 9,5 | 9,1 | 8,7 \dots)$$

$\rightarrow$ 8,7 km ✓

1. Minute; $d = -0,4$ ✓

• ges.: Nachweis: Geschwindigkeiten F1 u. F2 unterscheiden sich um 50 km h^{-1}

Lös.: Wege bestimmen für $t = 1 \text{ Min.}$

$$F1: |\vec{P}_1 \vec{Q}_1| = \sqrt{(17,6 - 4,7)^2 + (81,2 - 76,9)^2 + (8,5 - 8,5)^2} \approx 13,6 \text{ km} \checkmark$$

$$F2: |\vec{P}_2 \vec{Q}_2| = \sqrt{(0 + 13,8)^2 + (78,0 - 73,8)^2 + (9,9 - 10,3)^2} \approx 14,4 \text{ km} \checkmark$$

$$\wedge F1: v = \frac{s}{t} = \frac{13,6 \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} \approx 815,87 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$F2: v = \dots \approx 865,83 \frac{\text{km}}{\text{h}} \checkmark \quad \Delta \text{Diff.} \approx 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \checkmark$$

2.2. ges.: Abstand der Flugbahnen durch Flugzeuge

Lös.: Abstand wird schräg gemessen

$$F1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,7 \\ 76,9 \\ 8,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12,9 \\ 4,3 \\ 0 \end{pmatrix}; F2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -13,8 \\ 73,8 \\ 10,3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 13,8 \\ 4,2 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

$$d^*(F1, F2) = \left| (\vec{x}_0 - \vec{x}_1) \cdot \vec{n}_0 \right|$$

NR: $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ sind Ortsvektoren der Geradengleichungen

$$\vec{n}_0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

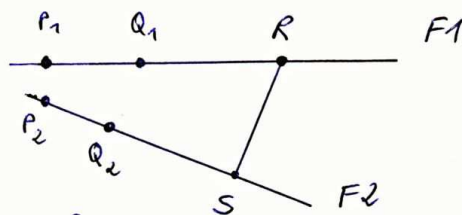
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 12,9 & 13,8 \\ \vec{j} & 4,3 & 4,2 \\ \vec{k} & 0 & -0,4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1,72 \\ 5,16 \\ -5,16 \end{pmatrix} \quad \text{CP: Cross P...} \checkmark$$

$$\text{bzw. } \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$d^*(F1, F2) = \left| \left(\begin{pmatrix} 4,7 \\ 76,9 \\ 8,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13,8 \\ 73,8 \\ 10,3 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \checkmark$$

$$d^*(F1, F2) = \text{CP} \left| \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \begin{pmatrix} 18,5 \\ 3,1 \\ -1,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (-3,8) \right| \approx 0,9 \text{ km} \checkmark$$

2.3. geg.:



(7)

ges.: $|RS|$ nach
3 Minuten

Lös.: F1: für $t=3$ folgt: $\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 4,7 \\ 76,9 \\ 8,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38,7 \\ 12,9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43,4 \\ 89,8 \\ 8,5 \end{pmatrix}$ ✓

→ $R(43,4 | 89,8 | 8,5)$ ✓

F2: für $s=3$ folgt: $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} -13,8 \\ 73,8 \\ 10,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 41,4 \\ 12,6 \\ -1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,6 \\ 86,4 \\ 9,1 \end{pmatrix}$

→ $S(27,6 | 86,4 | 9,1)$ ✓

→ $|RS| \approx 16,2 \text{ km}$ ✓

ges.: kleinstmöglicher Abstand beide Flugzeuge

Lös.: Dieser Abstand ist zeitabhängig.

Beide Flugzeuge haben zu einem bestimmten Zeitpunkt
einen kleinstmöglichen Abstand voneinander.

Dieser entspricht nicht per se dem Abstand der
windschiefen Flugbahnen.

Nachweis: Extremwertaufgabe:

$|RS| \rightarrow \text{Min}$ ✓

Ansatz: $|RS| = f(t) = \sqrt{(\vec{x}_{F2} - \vec{x}_{F1})^2} \rightarrow \text{Ziel fun.}$

$|RS| \stackrel{(*)}{=} f(t) = \sqrt{(-13,8 + 13,8t - 4,7 - 12,9t)^2 + (73,8 + 4,2t - 76,9 - 4,3t)^2 + (10,3 - 0,4t - 8,5)^2}$ ✓

CP: E: $f(t)$

V: Menü Grafik, Min-Suche

A: $t_{\text{min.}} \approx 17,41 \text{ Min}$ $|RS|_{\text{min.}} \approx 7,62 \text{ km}$ ✓ $\neq 0,9 \text{ km}$

(*) Vereinfacht:

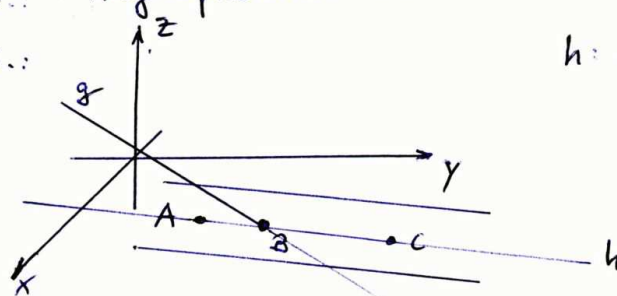
$f(t) = \sqrt{(-18,5 + 0,9t)^2 + (-3,1 - 0,1t)^2 + (1,8 - 0,4t)^2}$

2.4. geg.: $A(2|1|0,1)$; $C(1,3|4,5|0)$ (8)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -13,0 \\ h \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,5 \\ a \end{pmatrix}$; $h > 0$, $a < 0$

ges.: Neigungswinkel SL-Bahn $h(A,C)$ zur xy -Koordinatenebene

Lös.:



$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,5 \\ -0,1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen Gerade h und Ebene $z=0$:

$\sin \angle(h, xyE) = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,5 \\ -0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0,49 + 12,25 + 0,01} \cdot 1} \right|$

$\sin \angle(h, xyE) = \left| \frac{-0,1}{3,571} \right| \approx 0,028 \rightarrow \angle \approx 1,6^\circ$

• ges.: B

Lös.:

$\vec{OB} = \vec{OA} + 0,5 \cdot \vec{AC}_0$; $\vec{AC}_0 = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$

$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{0,49 + 12,25 + 0,01}} \cdot \begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,5 \\ -0,1 \end{pmatrix}$

$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \frac{0,5}{3,571} \cdot \begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,5 \\ -0,1 \end{pmatrix}$

$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + 0,14 \begin{pmatrix} -0,7 \\ 3,5 \\ -0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 1,5 \\ 0,09 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \underline{\underline{B(1,9|1,5|0,09)}}$