Lösungen

Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

1. Zufallsexperimente

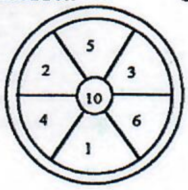
Bsp.: "Das Werfen einer Münze"
* sicher ist, ...dass die Münze liegenbleibt.........
* zufällig ist, ..ob Wappen oder Zahl oben liegt.
* man könnte mehrmals werfen, ob sich eine Gesetzmäßigkeit zeigt
= Wiederholte Durchführung eines Zufallsexperiments unter gleichen Bedingungen
* Ergebnisse: Wappen(W) oder .Zahl (Z).. oder .Kante... sind garantiert → wird vernachlässigt!

das sind Elemente der **ERGEBNISMENGE S** des Zufallsexperiment

Merke: Ein Zufallsexperiment ist dann eindeutig beschrieben, wenn eine Menge S von möglichen Ergebnissen e_1, e_2, e_3, ..., e_n so festgelegt ist, daß bei jeder Wiederholung des Experiments genau eines dieser Ergebnisse eintritt.

Bsp.: Ermitteln Sie Ergebnismengen folgender Zufallsexperimente:

"Ein Wurf mit einem Würfel"	S = {.........1, 2, 3, 4, 5, 6..........}
"Geburt eines Kindes"	S = {..Junge, Mädchen...........}
"Fahrzeug starten"	S = {..startet, startet nicht.....}
"Dart-Spiel, Variante Scheibe treffen"	S = {..getroffen, daneben........}
"Dart-Spiel, Variante Zahl treffen"	S = {....1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, daneben.}
"Dart-Spiel, Variante Gebiet treffen"	S = {..Mitte, Sektor, daneben....}



Übungen:

1) Ermitteln Sie die Ergebnismenge!
Eine Urne U1 enthält rote und weiße Kugeln, eine Urne U2 enthält blaue und weiße Kugeln
Zufallsexperiment: r w b w
"Ziehe aus U1 und U2 je eine Kugel und notiere die Farben."

S = {.rw, rb, ww, wb..............} (siehe **HILFE!**)

Erkenntnis: Diese Zufallsexperiment ist ....zweistufig..................
Die Ergebnisse (Elemente der Ergebnismenge) sind ...2-Tupel

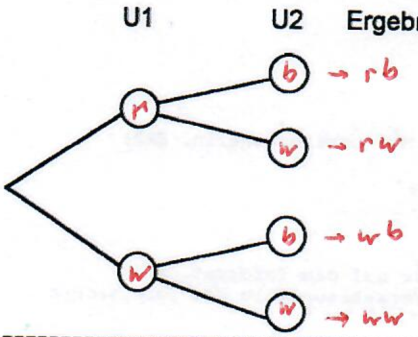
2) Ermitteln Sie die Ergebnismenge!
Zufallsexperiment:
"Aus einer Sendung mit Weingläsern werden (nacheinander) 3 Gläser entnommen und auf Qualität geprüft." s = schadhaft, e = einwandfrei

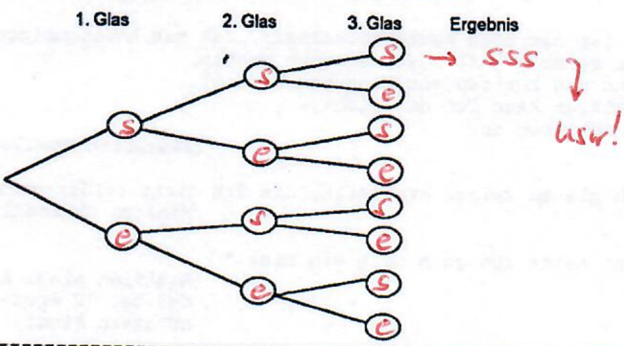
S = {sss, sse, ses, ess, see, ese, ees, eee} (siehe **HILFE!**)

Erkenntnis: Diese Zufallsexperiment ist ....dreistufig.................
Die Ergebnisse (Elemente der Ergebnismenge) sind Tripel

Merke: Bei n-stufigen Zufallsexperimenten erhalten wir n-Tupel als Ergebnisse.

HILFE!!
Treten beim Finden der Ergebnisse Probleme auf, so hilft meist ein Baumdiagramm.





Beachte auch:
Mitunter werden ~~werden~~ Zufallsexperimente wiederholt durchgeführt, z.B. bei Gütekontrollen
Siehe Beispiel 2 im LB Klett S. 7 → lesen!
Es gilt sinnvolle, dem Zweck angepaßte Ergebnisintervalle festzulegen. Dazu bedient man sich meist einer URLISTE, in der einzelne Beobachtungswerte einer statistischen Erhebung nacheinander festgehalten sind.
Zwecks besserer Überschaubarkeit werden die einzelnen Beobachtungsergebnisse zu (oft gleich langen) Klassen zusammengefaßt.

 C by Frank Kaden 2021

Lösungen

(2)

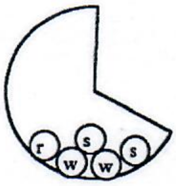
Fachbereich Mathematik
Bernhard-von-Cotta-Gymnasium Brand-Erbisdorf

2. Zufällige Ereignisse

Bsp.: Zufallsexperiment:
"Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen einer Kugel aus einer Urne und Feststellen der Farbe"

Ergebnismenge S = {rw, rs, ww, ss, ws, wr, sr, sw}

Man erkennt bestimmte Teilmengen:



A - Rot im ersten Zug ={rw, rs}

B - Weiß im zweiten Zug ={rw, ww, sw}

C - Schwarz im 1. u. 2. Zug ={ss}

D - In jedem Fall 1xWeiß ={rw, sw, ws, wr}

Die Teilmengen A, B, C, D heißen **EREIGNISSE**.
Das Ereignis A ist eingetreten, wenn ein Ergebnis aus A beim Experiment aufgetreten ist

Es gibt einelemtige Ereignisse, z.B.:. C --> **ELEMENTARREIGNIS**

Das Ereignis S tritt immer ein --> **SICHERES EREIGNIS**

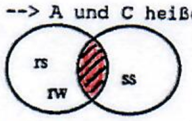
Das Ereignis F = Ø tritt niemals ein. Es ist aber eine Teilmenge von S. --> **UNMÖGLICHES EREIGNIS**

(Ø heißt „leere Menge")

Das Ereignis E = {ww,ss,sr,rs} enthält alle Ergebnisse, die D nicht enthält. --> E ist **GEGENEREIGNIS** von D, kurz: $E = \overline{D}$

Die Ereignisse A und C besitzen voneinander verschiedene Ergebnisse --> A und C heißen **UNVEREINBAR**, kurz: $A \cap C = \emptyset$

Operation „Durchschnitt"



← das ist ein VENN-Diagramm (John Venn, 1834 - 1923)

DEFINITION: Ein Zufallsexperiment habe die Ergebnismenge $S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$.
Jede Teilmenge $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ von S heißt **Ereignis** des Zufallsexperiments.
Es tritt ein, wenn das Experiment mit einem Ergebnis aus A endet.

Bsp.: Ergebnis rw --> Ereignis S, A, B, D ist eingetreten
Ergebnis ss --> Ereignis S, C ist eingetreten

Weitere Übungen:

1) Geburt eines Kindes: S = {Junge, Mädchen}
Welche Ereignisse sind denkbar? → Ereignisbeschreibung

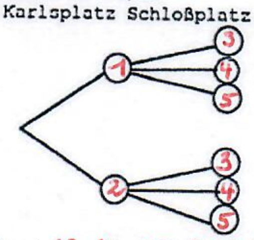
Ereignissymbol ← A - Junge geb. = {Junge} → Elemente des Ereignisses
B - Mädchen geb. = {Mädchen}
C - Kind geb. = {Ju, Mä}
D - kein Kind = Ø

2) LB Klett S.13/3
a)
A - Primzahl = {2, 3, 5, 7}
B - teilbar/5 = {0, 5}
C - ungerade = {1, 3, 5, 7, 9}
D - > 8 = {9}
E - Quadratzahl = {0, 1, 4, 9}

b) $A \cap D$, $A \cap E$, $B \cap D$ = Ø

c) $\overline{A}$ - Keine Primz. $\overline{B}$ - nicht teilbar/5, $\overline{C}$ - gerade
$\overline{D}$ - < 9, $\overline{E}$ - Keine Quadratzahl

3) LB Klett S. 14/11
a) Karlsplatz Schloßplatz Ergebnisse (Baumdiagramm möglich)



S = {13, 14, 15, 23, 24, 25} (zweistufig!)

b) Ereignis A - Herr Müller fährt mit Linie 1 = {13, 14, 15}
Ereignis B- Herr Müller fährt nicht mit Linie 5 = {13, 14, 23, 24}

c) Ereignis A1 - Herr Müller fährt mit Linie2 und 3 = {23} (Elementarereignis!)
A2 - → siehe Seite 3 des Lösungsscripts!

C by Frank Kaden 2021

Lösungen ③

LB Klett S. 141 11c)

„Welche Ereignisse sind eingetreten, wenn Herr Müller zunächst mit der Linie 2 fährt und dann in Linie 3 umsteigt?"

↗ $\{23\}$ ist ein Element der Ergebnismenge und auch ein Ergebnis verschiedener Teilmengen der Ergebnismenge.

↗ D.h. Es gibt mehrere Ereignisse (Teilmengen), in denen das Ergebnis 23 vorkommt. Damit können alle diese Ereignisse eintreten, wenn Herr Müller erst mit Linie 2 und danach mit Linie 3 fährt

↗ Hier ist die Liste aller dieser Ereignisse:

$A_1 = \{23\}$ ein Elementarereignis

$A_{2..6} = \{23, 13\}, \{23, 14\}, \{23, 15\}, \{23, 24\}, \{23, 25\}$ fünf 2-elementige Ereignisse

$A_{7..16} = \{23, 13, 14\}, \{23, 13, 15\}, \{23, 14, 15\}$
$\{23, 13, 24\}, \{23, 13, 25\}, \{23, 14, 24\}$
$\{23, 14, 25\}, \{23, 15, 24\}, \{23, 15, 25\}$
$\{23, 24, 25\}$ zehn 3-elementige Ereignisse

$A_{17..26} = \{23, 13, 14, 15\}, \{23, 13, 14, 24\}, \ldots$ zehn 4-elementige Ereignisse

$A_{27..31} = \{23, 13, 14, 15, 24\}, \ldots$ fünf 5-elementige Ereignisse

$A_{32} = \{23, 13, 14, 15, 24, 25\}$ ein 6-elementiges Ereignis

↗ Es können <u>32 Ereignisse</u> eintreten.

Zusammenfassung:

Die Anzahl aller möglichen Ereignisse einer Ergebnismenge eines Zufallsexperiments heißt Ereignisraum (oder auch Ereignisfeld, oder Potenzmenge). Dabei handelt es sich um eine Menge von Mengen oder auch um eine Liste von Listen.

Beispiele:

Menge aller Ereignisse einer zweielementigen Ergebnismenge:

Beispiel Münzwurf: $S = \{W, Z\}$

$A_1 = \{W\}$; $A_2 = \{Z\}$; $A_3 = \{W, Z\}$; $A_4 = \emptyset$ (auch die leere Menge ist eine Teilmenge der Ergebnismenge!)

$\Rightarrow$ Damit enthält die Potenzmenge von S genau 4 Elemente

$\Rightarrow$ $POT(S) = \{\emptyset, \{W\}, \{Z\}, \{W Z\}\}$

Beispiel für eine dreielementige Ergebnismenge: $S = \{a, b, c\}$

$A_1 = \{a\}$; $A_2 = \{b\}$; $A_3 = \{c\}$; $A_4 = \{a, b\}$; $A_5 = \{a, c\}$

$A_6 = \{b, c\}$; $A_7 = \{a, b, c\}$; $A_8 = \emptyset$

$\Rightarrow$ $POT(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Damit enthält die Potenzmenge genau 8 Elemente

Mit etwas logischer Anschauung erhält man folgende Aussage:

S mit 2 Elementen: $POT(S) = 4$ Elemente

S mit 3 Elementen: $POT(S) = 8$ Elemente

S mit 4 Elementen: $POT(S) = 16$ Elemente

S mit 8 Elementen: $POT(S) = 256$ Elemente

S mit K Elementen: $POT(S) = 2^K$ Elemente

Hat ein Zufallsexp. K Ergebnisse, dann existieren 2^K Ereignisse!