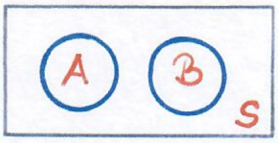
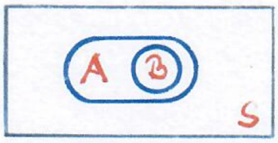
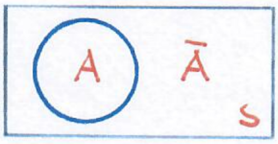
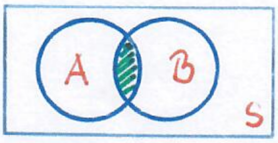
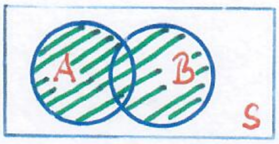
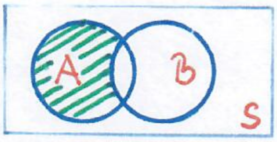
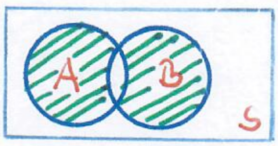
3. Operationen mit Mengen - Lösungen

Beispiel 1: "Werfen eines idealen Würfels"
mit A = gerade Augenzahl = {2,4,6}
und B = Augenzahl ist Primzahl = {2,3,5}

Mengendiagramm	Symbole	Sprechweisen	**Aussage bzgl Bsp. 1:**
	$A \cap B = \emptyset$	A und B sind unvereinbar. A und B können nicht gleichzeitig eintreten.	**A und B sind nicht unvereinbar**
	$B \subset A$	B ist Teilereignis von A. Immer wenn B eintritt, tritt auch A ein.	**B ist nicht Teilereignis (Teilmenge) von A**
	$\bar{A}$	$\bar{A}$ ist das Gegenereignis von A. $\bar{A}$ tritt ein, wenn A nicht eintritt.	**B ist nicht Gegenereignis von A**
	$A \cap B$	A und B tritt ein. Beide Ereignisse treten gleichzeitig ein.	**$A \cap B = \{2\}$**
	$A \cup B$	A oder B tritt ein. Eines der Ereignisse oder beide treten ein.	**$A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$**
	$A \setminus B$	A minus B (A ohne B) tritt ein. A tritt ein und B tritt nicht ein.	**$A \setminus B = \{4,6\}$**
 ↗ auch LB. S. 69	$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ oder $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	Entweder A oder B tritt ein. Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein.	**$= (\{2,4,6\} \cap \{1,4,6\}) \cup (\{1,3,5\} \cap \{2,3,5\})$** **$= (\{4,6\}) \cup (\{3,5\})$** **$\underline{= \{3,4,5,6\}}$**

Weitere Übungen:

Bsp. 2:

Beim Würfeln mit einem Würfel sei S={1,2,3,4,5,6} , A={1,3,5} , B={4,5,6} , C={1,2,3}.
Gib folgende Ereignisse (in aufzählender Weise) an.

a) $A \cup B$ = { 1, 3, 4, 5, 6 }
b) $A \cup C$ = { 1, 2, 3, 5 }
c) $\overline{A}$ = { 2, 4, 6 }
d) $\overline{A \cap C}$ = { 2, 4, 5, 6 }
e) $\overline{A \cup B}$ = { 2 }
f) $\overline{A} \cup \overline{C}$ = { 2, 4, 5, 6 }
g) $\overline{A} \cap \overline{B}$ = { 2 }
h) $A \cap \overline{B}$ = { 1, 3 }
i) weder A noch C = { 4, 6 } $= \overline{A \cup C}$ = nicht (A oder C)
j) entweder A oder B = { 1, 3, 4, 6 } $= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
k) A oder B = { 1, 3, 4, 5, 6 }
l) B, aber nicht A = { 4, 6 } $= B \setminus A$
m) nicht sowohl A als auch B = { 1, 2, 3, 4, 6 } $= \overline{A \cap B}$ = nicht (A und B)

Es gilt:
$\overline{A \cap C} = \overline{A} \cup \overline{C}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Regeln von de Morgan (1806 – 1871, engl. Mathematiker)

Bsp. 3:

In einem Büro sind 3 PC vernetzt. Es soll zwischen dem eingeschalteten Zustand (1) und dem ausgeschalteten Zustand (0) der Computer unterschieden werden.
Als Ergebnismenge S wird die Menge aller Tripel aus Nullen und Einsen gewählt.
Das Ereignis A1 (A2, A3) bedeutet, der erste PC (der zweite, der dritte) ist eingeschaltet.

a) Gib die Ereignisse S, A1, A2, A3 in aufzählender Weise an.

S = { 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000 }
A1 = { 111, 110, 101, 100 }
A2 = { 111, 110, 010, 011 }
A3 = { 111, 011, 101, 001 }

b) Ermittle weitere Ereignisse aus den gegebenen Mengenoperationen bzw. aus den Wortdarstellungen.

$A = A1 \cap A2 \cap A3$
= { 111, 110, 101, 100 } ∩ { 111, 110, 010, 011 } ∩ { 111, 011, 101, 001 }
= { 111 }
A = alle PC sind eingeschaltet (in Worten)

Durchschnitt

$B = \overline{A1} \cup \overline{A2} \cup \overline{A3}$
= { 011, 010, 001, 000 } ∪ { 101, 100, 001, 000 } ∪ { 110, 100, 010, 000 }
= { 110, 101, 011, 100, 010, 000, 001 } $= \overline{A}$
B = nicht alle PC sind eingeschaltet (in Worten)

Vereinigung

C = A1
C = der erste PC ist eingeschaltet (in Worten)

$D = \overline{A1} \cap A2 \cap A3$
= { 011, 010, 001, 000 } ∩ { 111, 110, 010, 011 } ∩ { 111, 011, 101, 001 }
= { 011 }
D = nur der erste PC ist aus (in Worten)

Durchschnitt

$E = A1 \cup A2 \cup A3$
= { 111, 110, 101, 100 } ∪ { 111, 110, 010, 011 } ∪ { 111, 011, 101, 001 }
= { 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001 }
E = ein PC ist eingeschaltet (in Worten)
≙ mindestens ein PC ist eingeschaltet

Vereinigung