

S. 275

- 3) Die Punkte A, B, C haben alle den gleichen y-Koordinatenwert, d. h. die Ebene E(A, B, C) liegt parallel zur xz -Ebene.

Damit beträgt der Abstand vom Punkt P(5|15|9):

$$15 - 2 = \underline{\underline{13 \text{ LE}}}$$

- 4) geg.: A(3|3|2); B(5|3|0); C(3|5|0)

a) ΔABC sei gleichseitig; Fläche des Δ : F

Zeigen: $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{AC}| = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$ (Beträge ber.!)

Berechnen: $F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ od. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g(OF) $\times$ E(ABC) in F
 $F\left(\frac{8}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{8}{3}\right)$; $d^* = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $V = \underline{\underline{\frac{16}{3} \text{ VE}}}$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 16} = \underline{\underline{2\sqrt{3} FE}}$$

S. 276

- 7) geg.: $d^*(A, E) = 5$; A(3| y_A |0); E: $2x + y - 2z = 4$

a) ges.: y_A

Lös.: Da E in Koordinatenform vorliegt, kann man die Koordinatenform der Abstandsformel anwenden.

$$d^*(A, E) = \left| \frac{ax_A + by_A + cz_A - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$d^*(A, E) = \left| \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot y_A - 2 \cdot 0 - 4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = 5$$

$$\left| \frac{2 + y_A}{3} \right| = 5$$

Fall 1: $\frac{2 + y_A}{3} = 5$

Fall 2: $-\frac{2 + y_A}{3} = 5$

$$\underline{\underline{y_{A1} = 13}}$$

$$\underline{\underline{y_{A2} = -17}}$$

b) analog! : $y_{A1} = -\frac{45}{4}$; $y_{A2} = \frac{5}{4}$

S. 276

8a) geg.: $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

ges.: Nachweis für $E \parallel F$: $\vec{n}_E = \lambda \vec{n}_F$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \checkmark \Rightarrow E \parallel F$$

Abstand $d^*(E, F)$ zurückführen auf

Abstand $d^*(R, F)$ mit $R \in E$; $R(2|3|1)$

$$\begin{aligned} \wedge d^*(P_0, F) &= \left| (\vec{r} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n}_0 \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot (8 + 16 - 2) = \frac{22}{\sqrt{12}} = \frac{11}{\sqrt{3}} \text{ LE} \end{aligned}$$

10) geg.: $P(2r+3s \mid r-2s \mid 4r-s)$

$E: x + 2y - z = 6$

ges.: $d^*(P, E)$

Lös.:

$$\begin{aligned} d^*(P, E) &= \left| \frac{1 \cdot (2r+3s) + 2(r-2s) - 1 \cdot (4r-s) - 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{2r+3s+2r-4s-4r+s-6}{\sqrt{6}} \right| \\ &= \left| \frac{-6}{\sqrt{6}} \right| = \underline{\underline{\sqrt{6} \text{ LE}}} \end{aligned}$$

S. 276

11) geg.: $M(\frac{1}{2}|r|r)$; $E(A, B, C, D)$

ges.: $d=2r$ des Balls

Lös.: Ebenengleichung herstellen:

aus $A(1|0|1)$; $D(0|0|1)$; $C(0|y_c|0)$

folgt die Ebenengl. in der 3 Punkte-Form!

NR.: $y_c = \sqrt{2,6^2 - 1^2}$ (Pythagoras)

$y_c = 2,4 \rightarrow C(0|2,4|0)$

$\rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2,4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -1 & -1 \\ \vec{e}_2 & 0 & 2,4 \\ \vec{e}_3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2,4 \end{pmatrix} \rightarrow E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2,4 \end{pmatrix} = 0$

$\rightarrow d^*(M, E) = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ r & 0 \\ r & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2,4)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2,4 \end{pmatrix} \right| = r$

$= \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ r \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2,4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2,6} \right| = r$

$= \left| \frac{1}{2,6} \cdot (-r - 2,4(r-1)) \right| = r$

$= \left| \frac{1}{2,6} \cdot (-3,4r + 2,4) \right| = r$

$\rightarrow \text{Fall 1: } \frac{1}{2,6} (-3,4r + 2,4) = r \quad \text{Fall 2: } -\frac{1}{2,6} (-3,4r + 2,4) = r$

$\rightarrow \underline{\underline{r = \frac{2}{5}}}$

$(\rightarrow \underline{\underline{r = 3}})$

entfällt wegen
Aufgabe!

5.278

3a) geg.: $P(-1|5)$, $g: (\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$

ges.: $d^*(P, g)$

los.: Problem ist 2-dimensional!

g umformen in $y = mx + n$:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

$$-5(x-1) + 12(y-2) = 0$$

$$-5x + 5 + 12y - 24 = 0$$

$$-5x + 12y = 19$$

$$12y = 5x + 19$$

$$\leadsto g: \underline{y = \frac{5}{12}x + \frac{19}{12}}$$

Senkrechte zu g durch $P \Rightarrow h$

$$\leadsto h: y = -\frac{12}{5}x + 4$$

$$P \rightarrow 5 = -\frac{12}{5} \cdot (-1) + 4$$

$$\frac{25}{5} = \frac{12}{5} + 4 \leadsto 4 = \frac{13}{5}$$

$$\leadsto h: \underline{y = -\frac{12}{5}x + \frac{13}{5}}$$

$$h \times g: \frac{5}{12}x + \frac{19}{12} = -\frac{12}{5}x + \frac{13}{5}$$

$$CP: \text{SOLVE: } x_S = \frac{61}{165} \leadsto \underline{S\left(\frac{61}{165} \mid \frac{293}{165}\right)}$$

$$d^*(P, g) = |\vec{PS}| = \sqrt{\left(\frac{61}{165} + 1\right)^2 + \left(\frac{293}{165} - 5\right)^2} = \underline{\underline{\frac{46}{13} LE}}$$

3e) geg.: $P(6/7|-3)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

ges.: $d^*(P, g)$

los.: 1) Hilfebene $E_H: (\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

2) $E_H \times g$ in S

3) $|\vec{PS}| = d^*(P, g) = \underline{\underline{7 LE}}$

S. 280

3a) geg.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}_{\vec{a}}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\vec{b}}$

ges.: $d^*(g, h)$; g und h sind windschief

Lös.:

$$d^*(g, h) = |(\vec{x}_0 - \vec{x}_1) \circ \vec{n}_0|$$

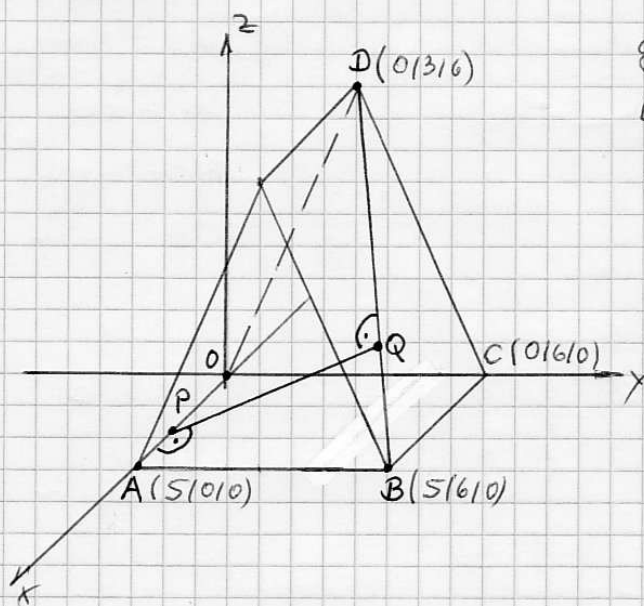
$$NR: \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e} & 1 & -2 & 6 \\ \vec{j} & -2 & 0 & 6 \\ \vec{k} & 6 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d^*(g, h) = \left| \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \right|$$

$$= \frac{1}{11} \cdot (60 + 63 - 2) = \frac{121}{11} = \underline{\underline{11 LE}}$$

5. 250/6



geg.: P, Q ; $d^*(P, Q) = d^*(OA, BD)$

Lös.:

$$d^*(OA, BD) = \left| (\vec{x}_A - \vec{x}_B) \cdot \vec{n}_0 \right|$$

$\vec{n}_0$ ist ein Normaleineheitsvektor der parallelen Ebenen, in denen die windschiefen Geraden liegen.

$$\vec{n} = \vec{BD} \times \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\wedge d^* = \left| \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$d^* = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\underline{d^* = \frac{12}{\sqrt{5}} \text{ LE}}$$

Fußpunkte P und Q:

geg.: $P(x_P | 0 | 0)$; $Q(x_Q | y_Q | z_Q)$
 $\begin{matrix} \text{wegen} \\ OA \perp PQ \end{matrix}$

geg.: $g_{PQ} \times BD \sim Q \wedge OA \text{ in } P$

$g_{PQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \vec{n}$; $\vec{n}$ von $E(BCD)$

$$\vec{n} = \vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

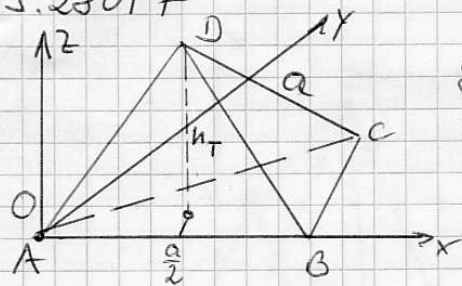
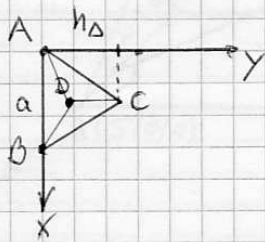
$$\wedge g_{PQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g_{PQ} \times E(BCD)$: $E(BCD)$ mit $2y + z = 12$ (von $\vec{n}$ und B)

g_{PQ} einsetzen: $2(2t) + t = 12 \wedge t = \frac{12}{5} \wedge Q(x_P | \frac{24}{5} | \frac{12}{5})$

$Q \in g_{BD}$: $\begin{pmatrix} x_P \\ \frac{24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge r = \frac{2}{5} \wedge x_P = 3$
 $\wedge Q(3 | \frac{24}{5} | \frac{12}{5}); P(3 | 0 | 0)$

S. 280/7

ges.: $d^*(AC, BD)$ Lös.: $A \equiv 0$ $B(a|0|0)$ $C(\frac{a}{2} | \frac{a\sqrt{3}}{2} | 0)$ $D(\frac{a}{2} | \frac{a\sqrt{3}}{6} | \frac{a\sqrt{6}}{3})$ Lage D: als Schwerpunkt des ΔABC

$$\rightarrow D \left(\frac{0+a+\frac{a}{2}}{3} \mid \frac{0+0+\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} \right) \text{ in } xy\text{-Eb.}$$

$$\rightarrow D \left(\frac{a}{2} \mid \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$h_T = \frac{a}{3}\sqrt{6} \text{ aus TW}$$

Abstandsbestimmung:

$$\vec{n} = \vec{BD} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \vec{j} & \frac{a\sqrt{3}}{6} & \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \vec{k} & \frac{a\sqrt{6}}{3} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{a}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{6}\sqrt{18} \\ -\frac{a^2}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \frac{a^2}{12}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{a^2}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{a^2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 3a^2\sqrt{2} \\ a^2\sqrt{6} \\ 2a^2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$d^* = \left| (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{n}_0 \right| = \left| \begin{pmatrix} a-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1 \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{18+6+12}} \right|$$

$$d^* = \left| \frac{1}{\sqrt{36}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot (3a\sqrt{2}) = \underline{\underline{\frac{a}{2}\sqrt{2}}}$$