

geg.: Dradenviereck $ABCD$

$A(0|0|0)$; $B(30|20|48)$; $C_k(0|5k|12k)$; $D(-30|20|48)$

$k \in \mathbb{R}, k > 0$

Lös.: 1.) • Ebenengleichung $E(ABCD)$

$$\vec{x} = \vec{OA} + r(\vec{AB}) + s(\vec{AD}) \quad \checkmark$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -30 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

• M habe die Koordinaten $M(0|20|48)$

$$M_{DB} \left(\frac{x_D + x_B}{2} \mid \frac{y_D + y_B}{2} \mid \frac{z_D + z_B}{2} \right) \quad \checkmark \text{ od. } \vec{OM} = \vec{OD} + \frac{1}{2} \vec{DB}$$

$$M_{DB} \left(\frac{0}{2} \mid \frac{40}{2} \mid \frac{96}{2} \right) \stackrel{!}{=} M_{DB}(0|20|48) \quad \checkmark \text{ w.z.z.w.}$$

• zeigen B, C_k und D liegen auf einer Geraden

$$g(BD): \vec{x} = \vec{OB} + t \vec{BD}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{ Punktprobe mit } C_k(0|20|48)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \Rightarrow t = \frac{1}{2} \quad \checkmark \text{ w.z.z.w.}$$

• $ABCD$ ist $\forall k \in \mathbb{R}, k > 4$ ein Dradenviereck

Für $k=4$ liegt ein Dreieck vor, da $C_4 = M_{DB}$ ist $\checkmark$

Für $k < 4$ liegt C_k innerhalb $\overline{AM}$ $\checkmark$ kein Dradenviereck!

↳ Begründung: $g(AM): \vec{x} = \vec{OA} + t \vec{AM}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\text{Punktprobe mit } C_k: \begin{pmatrix} 0 \\ 5k \\ 12k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$0 = 0 + 0t$$

$$5k = 0 + 20t \Rightarrow k = 4t$$

$$12k = 0 + 48t \Rightarrow t = 1$$

$\checkmark$ für $0 \leq t \leq 1$ gilt: $0 \leq k \leq 4t \Rightarrow 0 \leq k \leq 4 \checkmark$

$\checkmark$ für $k > 4$ liegt C_k auf $g(AM)$ außerhalb $\overline{AM}$ $\checkmark$ kein Dradenviereck!

• $ABCD$ soll Rhombus sein; ges.: K

- 4 gleich lange Seiten!

- $\vec{DB} \circ \vec{AC} = 0$ ✓

$$\rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{BC}| \wedge \left| \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -30 \\ 5k-20 \\ 12k-48 \end{pmatrix} \right| \quad \checkmark$$

$$\rightarrow \sqrt{30^2 + 20^2 + 48^2} = \sqrt{(-30)^2 + (5k-20)^2 + (12k-48)^2} \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ CP: $SOLVE(gl, k)$

$\wedge (k_1=0); \underline{k_2=8}$ ✓

13

2.) • ges.: K ($K \in \mathbb{R}, K > 4$) dafür, dass gilt:

$\angle DCB = 90^\circ$

Lös.: $\vec{CD} \circ \vec{CB} = 0$ ✓

$$\begin{pmatrix} -30 \\ 20-5k \\ 48-12k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 30 \\ 20-5k \\ 48-12k \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

$$-900 + (20-5k)^2 + (48-12k)^2 = 0 \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ CP: $SOLVE(gl, k)$

$\wedge (k_1 \approx 1,6923); \underline{k_2 \approx 6,3077}$ ✓✓
 $\left(\frac{22}{13}\right) \quad \left(\frac{82}{13}\right)$

9

• ges.: K dafür, dass gilt

$60^\circ < \angle DCB < 90^\circ$

Lös.: $\cos 60^\circ > \frac{\vec{CD} \circ \vec{CB}}{|\vec{CD}| \cdot |\vec{CB}|} > 0$ ✓

$0,5 > \text{---} > 0$ ✓

$$\rightarrow 0,5 > \frac{-900 + (20-5k)^2 + (48-12k)^2}{\sqrt{900 + (20-5k)^2 + (48-12k)^2} \cdot \sqrt{900 + (20-5k)^2 + (48-12k)^2}} \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ CP: $K < \frac{30}{13} \cdot \sqrt{3} + 4 \wedge \frac{82}{13} < K < \frac{30}{13} \cdot \sqrt{3} + 4$ ✓
 $(\approx 7,997) \quad \underline{6,3077 < K < 7,997}$

3) geg.: $A(0|0|0)$; $B(30|20|48)$; $C_P(0|40|96)$
 $D(-30|20|48)$

$$|\vec{AS}| = |\vec{C_P S}| \wedge |\vec{BS}| = |\vec{DS}|$$

$$V_P = 40560 \text{ cm}^3$$

ges.: S

Lös.: Für $K=8$ liegt ein Rhombus als Grundfläche der Pyramide vor
 Aufgrund der Seitenlängenlängen
 ist M der Lotfußpunkt von S
 mit $M(0|20|48)$

- Berechnung der Höhe der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h \wedge h = \frac{3V}{A_G}$$

$$\text{NR: } A_G = \frac{1}{2} |\vec{AC_P}| \cdot |\vec{DB}| \text{ (Rhombusfläche)}$$

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 40^2 + 96^2} \cdot \sqrt{60^2 + 0^2 + 0^2}$$

$$A_G = 3120 \text{ cm}^2$$

$$\wedge h = \frac{3 \cdot 40560 \text{ cm}^3}{3120 \text{ cm}^2} = 39 \text{ cm}$$

- Berechnung von S : $\rightarrow$ Rechnung hier egal, ∇

$$\vec{OS} = \vec{OM} \pm 39 \cdot \vec{n}_0 \text{ (es gibt 2 mögliche Punkte } S \text{!!)}$$

NR: $\vec{n}_0$ ist der Normalenheitsvektor
 der Rhombusebene:

Berechnung des Normalenvektors $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 30 & -30 \\ \vec{j} & 20 & 20 \\ \vec{k} & 48 & 48 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2880 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \text{crossP}(\dots) \rightarrow$$

$$\text{bzw.: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\wedge \vec{OS} = \vec{OM} \pm 39 \cdot \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} \pm 39 \cdot \frac{1}{\sqrt{(-12)^2 + 5^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} \pm \frac{39}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 48 \end{pmatrix} \pm 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 63 \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{l} S(0/-16/63) \\ \underline{\underline{S(0/56/33)}} \end{array}$$

bzw.