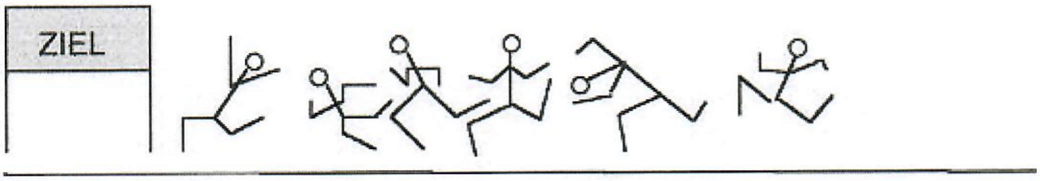
# 7. Kombinatorik

- Die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen hängt von der Betrachtung des Zufallsexperiments ab.
- Mitunter kann man über einen Umweg eine Gleichverteilung herstellen
- Das systematische Abzählen der Ergebnisse in E kann mit einigen Hilfsmitteln effektiver erfolgen.

*7.1. Ermittlung der Anzahl der Ergebnisse bei einem n-stufigen Zufallsexperiment*

1-stufig mit m Ergebnissen = m Ergebnisse
2-stufig mit m Ergebnissen = $m^2$ Ergebnisse — Bsp.: Würfeln mit 2 Würfeln: $6^2 = 36$ 2-Tupel in S
3-stufig mit m Ergebnissen = $m^3$ Ergebnisse — Bsp.: Werfen von 3 Münzen: $2^3 = 8$ Tripel in S
**n-stufig mit m Ergebnissen = $m^n$ Ergebnisse**

*7.2. Anordnungen von n-elementigen Mengen*




**Fragemöglichkeiten:**

**1) Wie viele Möglichkeiten der Belegung der Plätze 1 bis 6 gibt es?**
**2) Auf wie viele verschiedene Arten können die Plätze 1 bis 3 durch drei der sechs Läufer belegt werden?**
**3) Wie viele Möglichkeiten der Belegung der ersten 3 Plätze durch 6 Läufer gibt es überhaupt?**

*7.2.1. Permutationen*

Bsp.: Läufer = {A,B,C,D,E,F}

Wir betrachten alle Anordnungen in lexikographischer Anordnung:
ABCDEF ABCDFE ABCFDE ABCFED ABDCEF ABDCFE .... Oh, oh das werden viele!!

Versuchen wir's auf mathematischem Weg:

| | |
|---|---|
| 2 Läufer zweierlei Art anordnen: | AB und BA |
| 3 Läufer auf sechsfacher Art: | ABC ACB BAC BCA CAB CBA<br>C steht also bei der Variante mit 2 Läufern einmal an erster, dann an zweiter und danach an dritter Position<br>**also 2 * 3 = 6 Möglichkeiten** |
| 4 Läufer: | D kann bei den 6 Möglichkeiten von 3 Läufern an vier Positionen auftreten<br>**also 6*4 = 2*3*4=24 Möglichkeiten** |
| 5 Läufer: | E dann an fünf Positionen<br>**also 24*5 =2*3*4*5=120 Möglichkeiten** |
| 6 Läufer: | F an sechs Positionen<br>**also 120*6 = 2*3*4*5*6=720 Möglichkeiten** |

Ergebenis: Beim Zieleinlauf der sechs Läufer sind **720** Möglichkeiten denkbar.

**DEFINITION:**
Jede Anordnung der n Elemente einer endlichen Menge heißt PERMUTATION (lat. permutare = vertauschen) dieser n Elemente. Kurz: $P_n$

**SATZ:** $P_n = 1*2*3*4*5*6*...*n = \mathbf{n!}$ sprich: N-Fakultät

Bsp.:
a) $P_1 = 1$
b) $P_2 = 2! = 1*2 = 2$
c) $P_7 = 7! = 6! * 7 = 5040$
d) $P_{12} =$
e) $0! = 1$
f) $(n+1)! = 1*2*3*...*n*(n+1)$
g) $(n-2)! =$
h) $\frac{(n+1)!}{n!} =$

### *7.2.2. Anordnungen von Teilmengen - VARIATIONEN*

Bsp.: Wir suchen alle Anordnungen einer 3-elementigen Teilmenge der Läufermenge mit Beachtung der Reihenfolge.

Wir probieren an einer kleineren Läufermenge und schlußfolgern danach induktiv:
M = {a,b,c,d} sei unsere Ausgangsmenge:
alle Anordnungen der 1-elementigen Teilmengen sind a b c d = 4
alle Anordnungen der 2-elementigen Teilmengen sind ab ac ad ba bc bd ca cb cd da db dc = 12
alle Anordnungen der 3-elementigen Teilmengen sind abc abd acb acd adb adc
bac bad bca bcd bda bdc
cab cad cba cbd cda cdb
dab dac dba dbc dca dcb = 24
alle Anordnungen der 4-elementigen Teilmengen sind n! = 24

**DEFINITION:**
Die Anzahl aller Anordnungen von k Elementen einer n-elementigen endlichen Menge heißt VARIATION dieser n Elemente zur k-ten Klasse.

Kurz: $V_n^k$

Bsp.:

$V_4^1 = 4 = 4 = 24/6 \} = 24/(3*2*1)$

$V_4^2 = 12 = 4*3 = 24/2 \} = 24/(2*1)$

$V_4^3 = 24 = 4*3*2 = 24/1 \} = 24/(1)$

$V_4^4 = 24 = 4*3*2*1 = 24/1 \} = 24/1$

**SATZ:** $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bsp.: Für 6 Läufer gilt: $V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$ Möglichkeiten.

### *7.2.3. Anordnungen von Teilmengen - KOMBINATIONEN*

Bsp.: Wir suchen alle Anordnungen einer 3-elementigen Teilmenge der Läufermenge ohne Beachtung der Reihenfolge.

Wir probieren wieder an einer kleineren Läufermenge und schlußfolgern danach induktiv:
M = {a,b,c,d} sei unsere Ausgangsmenge:

Bei der Betrachtung der Variationen treten bei Nichtbeachtung der Reihenfolge von Anordnungen alle Anordnungen mehrfach auf. Wir zählen noch einmal und lassen keine Dopplungen zu:
alle Anordnungen der 1-elementigen Teilmengen sind a b c d = 4 = 4 / 1
alle Anordnungen der 2-elementigen Teilmengen sind ab ac ad bc bd cd = 6 = 12/1*2
(alle Anordnungen waren ja doppelt)
alle Anordnungen der 3-elementigen Teilmengen sind abc abd acd bcd = 4 = 24/1*2*3
(alle Anordnungen waren sechsfach)
alle Anordnungen der 4-elementigen Teilmengen sind abcd = 1 = 24/1*2*3*4

**DEFINITION:**
Die Anzahl aller Anordnungen von k Elementen einer n-elementigen endlichen Menge ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen heißt KOMBINATION dieser n Elemente zur k-ten Klasse.

Kurz: $C_n^k = \underline{V_n^k : k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ sprich: <u>n über k</u> ist ein Binomialkoeffizient

Bsp: für 6 Läufer gilt: $C_6^3 = \underline{120 : 6} = \underline{20 \text{ Möglichkeiten}}$

Übungen:

1) 15 Jungen einer 12. Klasse solle eine Volleyballmannschaft aufstellen. Wie viele Mannschaftszusammenstellungen sind möglich?
2) Wie viele verschiedene 6er (5er, 4er, 3er) sind beim Spiel 6 aus 49 möglich?
3) Aus einer Produktionsserie Viedeorecorder wird bei einer Qualitätskontrolle eine bestimmte Anzahl von Recordern ausgewählt und getestet.
   Wie viele Stichprobemöglichkeiten gibt es bei einer Serie von 100 Stück, wenn bei der Stichprobe 5 Recorder ausgewählt werden?
4) Wie viele verschiedene Zeichen lassen sich aus der Grundform der Blindenschrift nach BRAILLE bilden?
   (blinder franz. Blindenlehrer, 1809 -1852)

| Grundform: | ** | z.B.: | ** = N | * = R |
|---|---|---|---|---|
| | ** | | * | ** |
| | ** | | * | * |

5) Am Stundenplanbrett eines Gymnasiums mit insgesamt 32 Lehrern soll jede LehrerIn duch ein Farbplättchen gekennzeichnet werden, das einfarbig, zweifarbig oder dreifarbig sein kann. Reichen 5 Farben?

6) Wie viele Würfe mit nicht unterscheidbaren Würfeln, bei denen die einzelnen Würfel unterschiedliche Augenzahlen zeigen, sind beim würfeln mit 2 (3 | 4 ) Würfeln möglich?

7) Wie viele Würfe sind überhaupt mit 3 Würfeln möglich,
   a) wenn die Würfeln nicht unterscheidbar,
   b) unterscheidbar sind?

8) Wie viele Diagonalen hat ein 6-Eck (7-Eck, 8-Eck, n-Eck)?

9) Berechnen Sie folgende Binomialkoeffizienten in der entsprechenden Anordnung und begründen Sie die Namensgebung.

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

# Lösungen zu den Aufgaben:

1) Da die Reihenfolge innerhalb einer Mannschaft keine Rolle spielt, gilt:

$$C_{15}^{6} = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6! * (15-6)!} = 5005 \text{ Mannschaftszusammenstellungen}$$

2) Da die Reihenfolge innerhalb einer 6er-Kombination keine Rolle spielt, gilt:

$$C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = 13\,983\,816 \quad \text{6er}$$

analog 1 906 884 5er, 211876 4er, 18424 3er.

3) Da die Reihenfolge innerhalb der Stichprobe keine Rolle spielt, gilt:

mit n=100 und k=5 die Kombinationszahl C = 75 287 520 Möglichkeiten.

Problem: Mehr Recorder in einer Stichprobe bringt größere Sicherheit bei der Qualitätskontrolle. Mehr Recorder in einer Stichprobe sind aber ökonomisch nicht zu vertreten.

Hier ist die Anwendung der Statistik sinnvoll, um den günstigsten Zusammenhang zwischen Stichprobengröße und Qualitätssicherung zu finden.

4) Da die Punkte an sich nicht unterscheidbar sind, gilt:

mit n=6 und k=1..6 die Kombination $C_{6}^{1}$ bis $C_{6}^{6}$

Lösung: 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 Möglichkeiten.

Problem: Einige Zeichen müßte man auslassen, da sie durch Tasten schwer unterscheidbar sind.

5) Gegeben: n=5 und k=1..3

ohne Beachtung der Farbreihenfolge( gwg = ggw = wgg) folgt: $C_{5}^{1}$ bis $C_{5}^{3}$

Lösung: 5 + 10 + 10 = 25 Reicht nicht!

mit Beachtung der Farbreihenfolge folgt: $V_{5}^{1}$ bis $V_{5}^{3}$

Lösung: 5 + 20 + 60 = 85 Reicht aus!

6) Mit 2 Würfeln: Kombination einer 6-elementigen Menge zur 2.Klasse: 15 Würfe
Mit 3 Würfeln: Kombination einer 6-elementigen Menge zur 3.Klasse: 20 Würfe
Mit 4 Würfeln: Kombination einer 6-elementigen Menge zur 4.Klasse: 15 Würfe

7) a) zur Kombination mit 3 Würfeln (=20) gesellen sich noch DoppelAugenzahlen 112 bis 116
221 bis 226 usw.
das sind 5*6=30

und alle Dreier: 111 bis 666
das sind 6

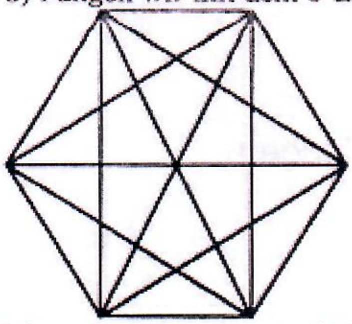
Gesamtanzahl : **56**

b) bei unterscheidbaren Würfeln (z.B. man würfelt mit einem roten, einen blauen und einen grünen):

$V_{6}^{3} = 120$ Möglichkeiten, falls sich die Augenzahlen unterscheiden,

dazu wieder die Doppel: 112, 121, 211, d.h. alle Doppel werden jetzt dreimal gezählt: das sind 3*30 = 90
dazu die Dreier: 111 bis 666 also noch 6 dazu:
Gesamtzahl: **216**

8) Fangen wir mit dem 6-Eck an:



Man erkennt insgesamt 9 Diagonalen. Da wir alle möglichen Verbindungen von zwei der 6 Eckpunkte herstellen, erhalten wir die Kombination einer 6-elementigen Menge zur 2. Klasse, müssen aber die 6 Kanten des 6-Eckes davon noch abziehen.

Also: $C_6^2 - 6 = 9$

Bei einem 7-Eck gilt demzufolge $C_7^2 - 7 = 14$

Bei einem 8-Eck gilt demzufolge $C_8^2 - 8 = 20$

Bei einem n-Eck gilt demzufolge $C_n^2 - n = 0{,}5n^2 - 1{,}5n$

9) Einfach mal das PASCALsche Dreieck betrachten! (Tafelwerk)
Kombinationzahlen entsprechen den Koeffizienten bei Binomen!