Lösungen Prüfungskomplex 6 – Mathe Leistungskurs 2018/19

1. Trivial ...

2. Polynom n- ten Grades: $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0$; $a_n \neq 0$
Polynom 3.Grades: $p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$
Anzahl der Nullstellen höchstens „vom Grad n". min.: eine NS; max.: 3 NS
Anzahl der Extrema: $p'_3(x) = 0$ (notw. Bed.)
$0 = 3ax^2 + 2bx + c$ min.. kein Extr.; max.: 2 Extr.
Anzahl der Wendepunkte: $p''_3(x) = 0$ (notw. Bed.)
$0 = 6ax + 2b$ 1 Wendepkt., da $a \neq 0$

3. 2: f(x) und 1: F(x), weil F'(x) = f(x) also F(x) ein Grad höher ist als f(x), damit die NS von f(x) die Extremstellen von F(x) und die Extremstelle von f(x) die Wendestelle von F(x).

4. Extremstellen von f(x): notw. Bed.: $f'(x) = 0$ $x_{E1} = -1$ und $x_{E2} = 5$
hinr. Bed.: $f''(x_E)>0$: Min. oder $f''(x_E)<0$: Max.
bzw. Min.: VZW von f' an der Stelle x_E von – nach +/Max.: VZW von f'an der Stelle x_E von + nach –
Min(5;f(5)) Max(-1;f(-1))

Wendestellen von f(x) notw. Bed.: $f''(x) = 0$ oder Extremstelle von f'(x)
$P_W(2;f(2))$
hinr. Bed.: $x_{E1}<x_W<x_{E2}$
nicht eindeutig, weil z.B. der Funktionstyp bzw. Polynom ... Grades, ob weitere Extrema vorliegen usw. nicht vorgegeben ist
Vorgabe: Polynom 3.Grades und Max.(-1;16/3) und P_W(2;-92/3)
4 Gleichungen notwendig (s.o.)
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) == 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

I: $f'(-1) = 0$: $0 = 3a - 2b + c$
II: $f(-1) = 16/3$: $16/3 = -a + b - c + d$
III: $f''(2) = 0$: $0 = 12a + 2b$
IV: $f(2) = -92/3$: $-92/3 = 8a + 4b + 2c + d$ ***$f(x) = 2/3x^3 - 4x^2 - 10x$***

5.a) $f(x) = -x^2$ oder $f(x) = -0{,}2x^2 + 4$ b) $f(x) = x^4$ oder $f(x) = 2x^4 + 0{,}5$

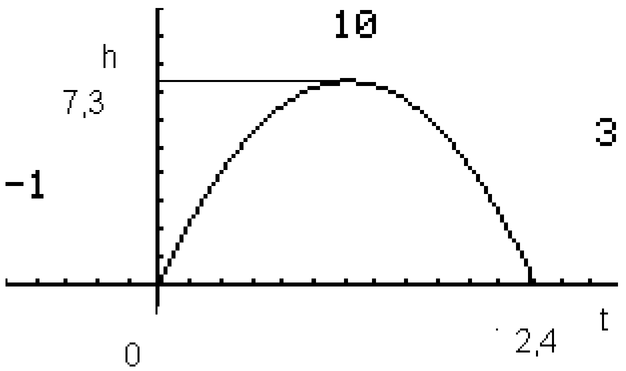
6.a) $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$
$f'(x) = 2ax + b$
$0 = 2ax + b$; $x_E = \frac{-b}{2a}$
$f''(x) = 2a \neq 0$

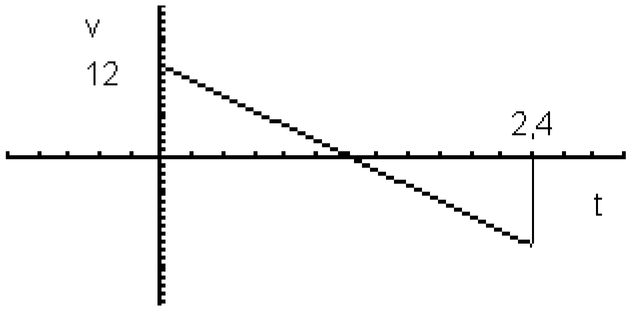
b) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0$; $a_n \neq 0$; $f'(x) = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0$; $a_{n-1} \neq 0$;
$0 = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0$;
Anzahl der Nullstellen höchstens „vom Grad n-1".

7.a) Weg-Zeit-Gesetz: $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

Geschw.-Zeit-Gesetz: $h'(t) = v_0 - gt$; max. Höhe $h'(t) = v_0 - gt = 0$; $t = v_0/g$;
$h''(t) = -g < 0$ max. Höhe $v_0^2/(2g)$
$v_0 = 12\,m/s$; $g = 9{,}81\,m/s^2$; $h_{max} \approx 7{,}3m$

b) $h(t) = 0$; $t_1 = 0$ und $t_2 = 2v_0/g$; $t \approx 2{,}4s$





8. Polynom 3.Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

a) $f(x) = ax^3 + cx$; $a \neq 0$
$f'(x) = 3ax^2 + c$

$f'(2) = 0$: $0 = 12a + c$; $c = -12a$

$f_a(x) = ax^3 - 12ax$

b) $f(0) = 0$: $d = 0$
$f''(0) = 0$: $0 = 2b$; $b = 0$
$f'(0) = 1$: $1 = c$

$f_a(x) = ax^3 + x$

9. $\mathrm{Min}\left(t; 2t + \frac{8}{t}\right)$; $t = 2$

10.a) $\vartheta(t) = -\frac{1}{16}t^4 + \frac{7}{12}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + \frac{9}{4}t + 39$

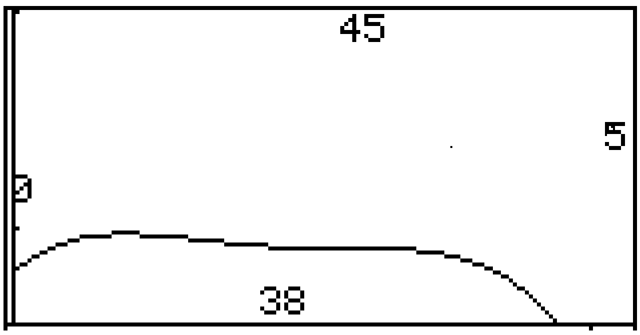
$\vartheta'(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{7}{4}t^2 - \frac{15}{4}t + \frac{9}{4}$

$\vartheta''(t) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{7}{2}t - \frac{15}{4}$

$\vartheta'''(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$

$\vartheta(0) = 39$; $\vartheta(1) = 39{,}9$; d.h. nach 1 Tag wurde die absolut höchste Temperatur von 39,9°C gemessen

b) $\vartheta(t)$



t

Wendestellen bei t = 5/3 und t = 3; f'(5/3) = -0,3 und f'(3) = 0, damit fällt das Fieber nach 5/3 Tagen schneller als nach dem Tag 3, nach 5 Tagen fällt die Fiebertemperatur am stärksten.
Das Fieber steigt zunächst im Krankenhaus weiter an und erreicht seinen höchsten Wert nach einem Tag.
Nach etwa einem Tag und 16 Stunden erreicht die Temperaturabnahme einen Maximalwert. Danach verlangsamt sich die Temperaturabnahme bis zum Ende des 3. Tages, um dann wieder stärker zu werden. Die Temperatur fällt kontinuierlich, bis am Ende des 5. Tages die Normaltemperatur von 37,2°C erreicht wird.

11. W(12;17,56); $\vartheta_0'(12) = 0{,}36$
Bis zum Zeitpunkt $t_0 = 12$ steigt die Temperaturzunahme an, ab diesem Zeitpunkt nimmt sie ab. Die Temperaturzunahme lag um 12.00 Uhr bei 0,36°C/h.

12. Polynomendivision: $(2x^2 - (2t + 1)x)/(x - t) = 2x - 1 - \frac{t}{x-t}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(2x - 1 - \frac{t}{x-t}\right) = 2x-1$; y = 2x – 1 ist schräge Asymptote für $t \neq 0$.

13. Polynomendivision: $(ax^2 - 2ax - x + 4)/(2ax - 2) = 0{,}5x - 1 + 1/(ax - 1)$
s.o.: y = 0,5x – 1 ist schräge Asymptote für alle Funktionen dieser Schar, da die Asymptotengleichung unabhängig von a ist und $a \neq 0$.