Lösungen Prüfungskomplex 3 – Mathe Leistungskurs 2019/20

2.A) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{(x_0+h)^3 - x_0^{\ 3}}{h}$ B) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h}$ C) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$

3. A) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

B) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \ln\left(1 + \dfrac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}} = 1$

C) $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\cosh - 1}{h} = 0$

4.
$$f_1'(x) = 7x^6 - 4ax^3 - ax^{-2}$$
$$f_1''(x) = 42x^5 - 12ax^2 + 2ax^{-3}$$

$$f_2'(x) = -2a(x-2)^{-3}$$
$$f_2''(x) = 6a(x-2)^{-4}$$

$$f_3'(x) = -e^{2-x} + 2ax^{a-1}$$
$$f_3''(x) = e^{2-x} + 2a(a-1)x^{a-2}$$

$$f_4'(x) = e^x x^2 + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$$
$$f_4''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$f_5'(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3x+3)$$
$$f_5''(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3\sin(3x+3)$$

$$f_6'(x) = -\frac{1}{x^2} + a - \frac{a}{2\sqrt{ax}}$$
$$f_6''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(ax)^3}}$$

---

5. Lösungsweg:
   - Bilden der ersten, zweiten und dritten Ableitung
   - (1) Notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$
   - (2) Hinreichende Bedingung für Extremstellen $f''(x_E) \neq 0$
   - (3) Notwendige Bedingung für Wendstellen $f''(x) = 0$
   - (4) Hinreichende Bedingung für Wendstellen $f'''(x_W) \neq 0$

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2}$

$= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$= e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$

$f'''(x) = -2x\,e^{-x^2}(-2 + 4x^2) + e^{-x^2}(8x)$

$= e^{-x^2}(-8x^3 + 4x + 8x)$

$= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x)$

1) $f'(x) = 0 \qquad 0 = -2xe^{-x^2}$

$x_E = 0$, da e^{-x^2} für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht Null wird.

2) $f''(0) = e^0(-2+0) = -2 < 0 \Rightarrow P_{Max}(0; 1)$

3) $f''(x) = 0 \qquad 0 = e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$

$0 = -2 + 4x^2$

$x^2 = \frac{1}{2} \qquad x_{W1} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad x_{W2} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

4) $f'''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\left(-8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 + 12\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(-4\sqrt{\frac{1}{2}} + 12\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8\sqrt{\frac{1}{2}}$ = oder $= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{\frac{64}{2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{32} \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

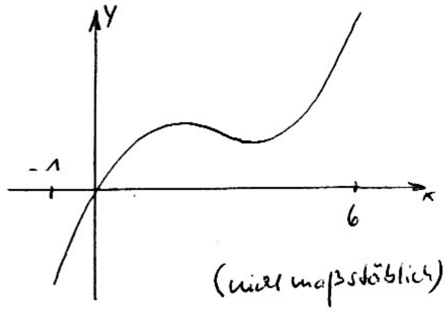
$= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4\sqrt{2} \neq 0 \qquad = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \neq 0$

$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ oder $P_{W1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -4\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$

$P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$

6. geg.: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$



(nicht maßstäblich)

a) $DB = \{x;\, x \in R\}$; $WB = \{y;\, y \in R\}$

NSt: $0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \quad |\cdot 3$

$0 = x^3 - 9x^2 + 24x$

$0 = x\,(x^2 - 9x + 24)$

$\underline{x_{0_1} = 0}$ keine weiteren

b) Tangente / Normale bei $x_0 = 3$

T: $f'(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(3) = 9 - 18 + 8 = \underline{-1 = m}$ $\Rightarrow$ Tang. (halbfertig): $y = -x + n$

$P(3|6)$ einsetzen:

$y = -x + n$

$6 = -3 + n \Rightarrow \underline{n = 9}$ $\Rightarrow$ Tang. (fertig): $\underline{\underline{y = -x + 9}}$

N: $\bar{m} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1} = \underline{1}$ $\Rightarrow$ Norm. (halbfert.) $y = x + n$

$P(3|6)$ einsetzen:

$y = x + n$

$6 = 3 + n \Rightarrow n = 3$ $\Rightarrow$ Norm. (fertig): $\underline{\underline{y = x + 3}}$

c) $f'(x) = 0 = x^2 - 6x + 8$

$0 = (x-2)(x-4) \Rightarrow x_{E_1} = 2;\ x_{E_2} = 4$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{E_1}(2|6,\overline{6});\ P_{E_2}(4|5,\overline{3})}}$

d) $f'(s) = 3 = m$

$\Rightarrow \tan\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \arctan(3) \approx \underline{\underline{71{,}6^\circ}}$

e) $y = x + 3$ schneidet f:

$x + 3 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

Lösung z.B. mit GTR, GRAPH: Y1: $x + 3$
Y2: $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

DRAW, GSOLV, ISCT: $S_1(0{,}55|3{,}55)$
▸ : $S_2(3|6)$ (↗b)
▸ : $S_3(5{,}45|8{,}45)$

f) $y = mx$ schneidet ebenfalls f:

$mx = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \quad |-mx$

$0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (8-m)x$

$0 = x \cdot \left(\underbrace{\tfrac{1}{3}x^2 - 3x + 8 - m}\right)$

$\underline{x_{S_1} = 0}$ $\quad 0 = x^2 - 9x + 3(8-m)$

$0 = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\tfrac{81}{4} - 3(8-m)}_{D}}$

falls $D = 0 \Rightarrow$ 2 Schnittpunkte
falls $D < 0 \Rightarrow$ 1 Schnittpunkt (x_{S_1})
falls $D > 0 \Rightarrow$ 3 Schnittpunkte
$\Rightarrow D = 0 = \frac{81}{4} - 24 + 3m$

$m = \frac{5}{4} \Rightarrow$ 2 S.
$m < \frac{5}{4} \Rightarrow$ 1 S.
$m > \frac{5}{4} \Rightarrow$ 3 S.

und **für m = 8** ex. genau ein Schnittpunkt und ein Berührpunkt

7. a) $P_y(0|-0,5)$

Nst: $x_0 = 0,5$

Extr: $P_T(-1|-1)$; $P_H(2|0,5)$

WP: $P_{W1}(0,25|-0,2)$

$P_{W2}(-2|-0,8)$

$P_{W3}(3|0,4)$

b) für $f'(x)$:

Nst: (Extremstellen von $f(x)$) $x_{0_1} = -1$; $x_{0_2} = 2$

x-Werte für $f'(x) > 0$: $-1 \leqq x \leqq 2$ (Anstieg bei $f(x) > 0$)

Extrema: Wendestellen von $f(x)$ sind Extremstellen bei $f'(x)$ $\curvearrowright$ 3 lokale Extrema