



Lösungen Prüfungskomplex 3 – Mathe Leistungskurs 2017/18

$$2. A) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} \quad B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x_0+h)} - e^{x_0}}{h} \quad C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$$

$$3. A) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$B) \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{2} \right)^{\frac{2}{h}} = 1$$

$$C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} = 0$$

$$4. \quad f_1'(x) = 7x^6 - 4ax^3 - ax^{-2}$$

$$f_1''(x) = 42x^5 - 12ax^2 + 2ax^{-3}$$

$$f_2'(x) = -2a(x-2)^{-3}$$

$$f_2''(x) = 6a(x-2)^{-4}$$

$$f_3'(x) = -e^{2-x} + 2ax^{a-1}$$

$$f_3''(x) = e^{2-x} + 2a(a-1)x^{a-2}$$

$$f_4'(x) = e^x x^2 + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x)$$

$$f_4''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$f_5'(x) = -2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3x+3)$$

$$f_5''(x) = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3 \sin(3x+3)$$

$$f_6'(x) = -\frac{1}{x^2} + a - \frac{a}{2\sqrt{ax}}$$

$$f_6''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(ax)^3}}$$



5. Lösungsweg:

- Bilden der ersten, zweiten und dritten Ableitung
- (1) Notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$
- (2) Hinreichende Bedingung für Extremstellen $f''(x_E) \neq 0$
- (3) Notwendige Bedingung für Wendstellen $f''(x) = 0$
- (4) Hinreichende Bedingung für Wendstellen $f'''(x_W) \neq 0$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-x^2} \\
 f'(x) &= -2x \cdot e^{-x^2} \\
 f''(x) &= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} \\
 &= -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} \\
 &= e^{-x^2} (-2 + 4x^2) \\
 f'''(x) &= -2x e^{-x^2} (-2 + 4x^2) + e^{-x^2} (8x) \\
 &= e^{-x^2} (-8x^3 + 4x + 8x) \\
 &= e^{-x^2} (-8x^3 + 12x)
 \end{aligned}$$

$$1) f'(x) = 0 \quad 0 = -2x e^{-x^2} \\
 \underline{x_E = 0}, \text{ da } e^{-x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ nicht Null wird.}$$

$$2) f''(0) = e^0 (-2 + 0) = -2 < 0 \rightarrow \underline{P_{\text{Max}} (0; 1)}$$

$$\begin{aligned}
 3) f''(x) = 0 \quad 0 &= e^{-x^2} (-2 + 4x^2) \\
 0 &= -2 + 4x^2 \\
 x^2 &= \frac{1}{2} \quad \underline{x_{W1} = \sqrt{\frac{1}{2}}}; \quad \underline{x_{W2} = -\sqrt{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) f'''(\sqrt{\frac{1}{2}}) &= e^{-\frac{1}{2}} (-8(\sqrt{\frac{1}{2}})^3 + 12\sqrt{\frac{1}{2}}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{e}} (-4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8\sqrt{2} = \text{oder} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{\frac{64}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \sqrt{32} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \underline{\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4\sqrt{2} \neq 0} = \underline{\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \neq 0}
 \end{aligned}$$

$$\underline{P_{W1} (\sqrt{\frac{1}{2}}; e^{-\frac{1}{2}})} \quad \text{oder} \quad \underline{P_{W1} (\sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})}$$

$$f'''(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = -4\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{P_{W2} (-\sqrt{\frac{1}{2}}; e^{-\frac{1}{2}})}$$



6. geg.: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

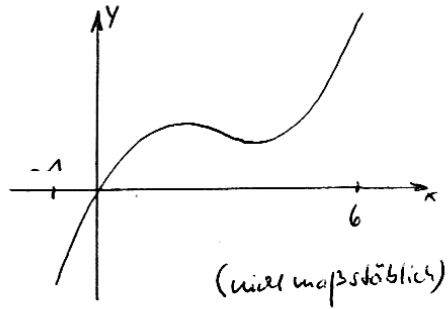
a) $DB = \{x; x \in \mathbb{R}\}; WB = \{y; y \in \mathbb{R}\}$

Nst: $0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \quad | \cdot 3$

$0 = x^3 - 9x^2 + 24x$

$0 = x(x^2 - 9x + 24)$

$x_{01} = 0$ keine weiteren



b) Tangente / Normale bei $x_0 = 3$

T: $f'(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(3) = 9 - 18 + 8 = -1 = m$ \rightarrow Tang. (halbfilig): $y = -x + n$

P(3|6) einsetzen:

$y = -x + n$

$6 = -3 + n \quad \rightarrow n = 9$

\rightarrow Tang. (fertig): $y = -x + 9$

N: $\bar{m} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1} = 1$

\rightarrow Norm. (halbfilig): $y = x + n$

P(3|6) einsetzen:

$y = x + n$

$6 = 3 + n \quad \rightarrow n = 3$

\rightarrow Norm. (fertig): $y = x + 3$

c) $f'(x) = 0 = x^2 - 6x + 8$

$0 = (x-2)(x-4) \quad \rightarrow x_{E_1} = 2; x_{E_2} = 4$

$\rightarrow P_{E_1}(2|6\bar{6}); P_{E_2}(4|5\bar{3})$

d) $f'(5) = 3 = m$

$\rightarrow \tan \alpha = 3 \quad \rightarrow \alpha = \arctan(3) \approx 71,6^\circ$

e) $y = x + 3$ schneidet f :

$x + 3 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

Lösung z.B. mit GTR, GRAPH: $Y1: x+3$

$Y2: \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

DRAW, GSOLV, ISCT: $S_1(0,55|3,55)$

$\Delta: S_2(3|6)$ (7b)

$\Delta: S_3(5,45|8,45)$

f) $y = mx$ schneidet ebenfalls f :

$mx = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \quad | -mx$

$0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (8-m)x$

$0 = x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 8-m \right)$

$x_{S_1} = 0$

$0 = x^2 - 9x + 3(8-m)$

$0 = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 3(8-m)}$

falls $D=0 \rightarrow 2$ Schnittpunkte

falls $D<0 \rightarrow 1$ Schnittpunkt (x_{S_1})

falls $D>0 \rightarrow 3$ Schnittpunkte

$\rightarrow D=0 = \frac{81}{4} - 24 + 3m$

$m = \frac{5}{4} \rightarrow 2 \text{ S.}$

$m < \frac{5}{4} \rightarrow 1 \text{ S.}$

$m > \frac{5}{4} \rightarrow 3 \text{ S.}$

und für $m = 8$ ex. genau ein Schnittpunkt und ein Berührungspunkt



7. a) $P_y(0|-0,5)$
Nst: $x_0 = 0,5$
Extk: $P_T(-1|-1)$; $P_H(2|0,5)$
WP: $P_{W1}(0,25|-0,2)$
 $P_{W2}(-2|-0,8)$
 $P_{W3}(3|0,4)$

b) für $f'(x)$:

Nst: (Extremstellen von $f(x)$) $x_{01} = -1$; $x_{02} = 2$

x-Werte für $f'(x) > 0$: $-1 \leq x \leq 2$ (Anstieg bei $f'(x) > 0$)

Extrema: Wendestellen von $f(x)$ sind Extremstellen bei $f'(x) \rightarrow$ 3 lokale Extrema